

0515

RESOLUCIÓN NÚMERO DE 2026

(05 MAY 2026)

"Por medio de la cual se adopta el modelo QGeoidCOL2023 asociado al datum MAGNA-SIRGAS y se modifica parcialmente la Resolución 068 de 2005"

EL DIRECTOR GENERAL DEL INSTITUTO GEOGRÁFICO AGUSTÍN CODAZZI

En uso de sus facultades legales y reglamentarias, en particular, las previstas en los numerales 2, 3 y 20 del artículo 10° del Decreto 846 de 2021, y

CONSIDERANDO:

Que, de conformidad con lo establecido en el artículo 3° del Decreto 846 de 2021, el Instituto Geográfico Agustín Codazzi – IGAC, tiene como objetivos cumplir el mandato constitucional referente a la elaboración y actualización del mapa oficial de la República de Colombia, así como ejercer como máxima autoridad catastral nacional y formular y ejecutar políticas y planes del Gobierno nacional en materia de cartografía, agrología, catastro, geodesia y geografía, mediante la producción, análisis y divulgación de información para apoyar los procesos de planificación y ordenamiento territorial.

Que, en los términos de los numerales 1, 2 y 12 del artículo 4° ibidem, el Instituto Geográfico Agustín Codazzi en su condición de autoridad en materia geográfica, geodésica, cartográfica, catastral y agrológica, ejerce funciones de regulación y definición de especificaciones técnicas para la ejecución de trabajos en dichas materias.

Que, conforme a lo dispuesto en los artículos 21, 22 y 23 del precitado Decreto, la Dirección de Regulación y Habilitación, la Dirección de Gestión de Información Geográfica y la Subdirección Cartográfica y Geodésica del IGAC, en el marco de sus funciones y competencias, intervienen en la formulación y adopción de normas, la definición de especificaciones técnicas, así como en el diseño y administración del Sistema Nacional de Referencia Geodésico, Gravimétrico y Geomagnético del país, de acuerdo con los estándares nacionales e internacionales aplicables.

Que el Instituto Geográfico Agustín Codazzi, mediante la Resolución 068 de 2005, adoptó como único datum oficial de Colombia el Marco Geocéntrico Nacional de Referencia

MAGNA-SIRGAS, y a través de la Resolución 715 de 2018 actualizó el Marco de Referencia Internacional Terrestre (International Terrestrial Reference Frame- ITRF) ITRF94 época 1995.4 al ITRF 2014 época 2018.0, así como la red de estaciones continuas MAGNA-ECO y la Red Pasiva GNSS MAGNA-SIRGAS y sus densificaciones.

Que, conforme a lo previsto en el parágrafo 2 del artículo 1° de la Resolución 068 de 2005, el modelo de geoide asociado al datum MAGNA-SIRGAS se denominó GEOCOL 2004 y se estableció que las versiones posteriores de dicho modelo serían nominadas teniendo en cuenta el año de su adopción oficial, y las alturas basadas en los Sistemas Globales de Navegación por Satélite (Global Navigation Satellite System - GNSS) serían referidas a dicho modelo.

Que, a la luz del Documento del Consejo Nacional de Política Económica y Social (CONPES) 3585 de 2009, el Instituto Geográfico Agustín Codazzi contribuye al desarrollo de la Infraestructura Colombiana de Datos Espaciales, en la cual el control geodésico constituye uno de los datos fundamentales, siendo un insumo esencial para los programas del Gobierno nacional en materia de desarrollo socioeconómico, seguridad nacional y sistemas de información.

Que Colombia, a través del Instituto Geográfico Agustín Codazzi, ha adoptado los fundamentos científicos definidos por la Asociación Internacional de Geodesia (International Association of Geodesy – IAG) y la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica (International Union of Geodesy and Geophysics – IUGG), orientados al desarrollo e implementación del Sistema de Referencia Internacional de Alturas (International Height Reference System – IHRF) y del Sistema de Referencia Global de Gravedad Absoluta (Global Absolute Gravity Reference System – GAGRS).

Que, en el marco de la Resolución A/RES/69/266 de 2015 de la Organización de las Naciones Unidas, se reconoce la importancia del Marco de Referencia Geodésico Mundial (Global Geodetic Reference Frame - GGRF), para el desarrollo sostenible, así como la necesidad de fortalecer la cooperación internacional en materia geodésica.

Que la ONU a través de la precitada Resolución, estableció un grupo de trabajo por el Comité de Expertos sobre la Gestión Mundial de la Información Geoespacial (United Nations Global Geospatial Information Management – UNGGIM) para elaborar una hoja de ruta geodésica mundial que incluya los elementos fundamentales de la formulación y sostenibilidad del marco de referencia geodésico mundial.

Que, para fundamentar técnicamente la modelación del campo gravitacional regional y su incidencia en la definición de sistemas de alturas geopotenciales en el territorio colombiano, se tuvo en cuenta la investigación adelantada por el Instituto Alemán de Investigación Geodésica de la Universidad Técnica de Múnich (Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut of the Technical University of Munich - DGFI-TUM), durante los años

2023 – 2024, denominado “Modelado regional del campo de gravedad de alta resolución en regiones con desafíos de datos para la realización de sistemas de alturas basados en geopotencial”, el cual usó como información básica datos oficiales de gravedad de los años 1941 al 2010 provistos por el Instituto Geográfico Agustín Codazzi, el Servicio Geológico Colombiano – SGC y la empresa Ecopetrol.

Que la anterior investigación constituye un referente técnico especializado para el cálculo del modelo geoidal nacional QGeoidCOL2023, el cual se encuentra asociado al marco de referencia geodésico MAGNA-SIRGAS, y define una metodología para la obtención de alturas físicas a partir de anomalías de altura.

Que, el modelo fue calculado utilizando como insumos datos gravimétricos terrestres, información de aerogravimetría, anomalías de gravedad derivadas de la altimetría satelital del modelo desarrollado por la Universidad Técnica de Dinamarca (DTU21GRA) para las zonas marinas, así como el modelo digital de terreno SRTM, éste modelo fue validado por la Subdirección Cartográfica y Geodésica usando los datos de nivelación geodésica y posicionamiento GNSS de acuerdo con los parámetros establecidos por el Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC).

Que, la captura de sesgos para los levantamientos aerogravimétricos se realiza utilizando el modelo combinado SATOP el cual fusiona el modelo de gravedad GOCO06s y el modelo de topografía Earth2014. Esta captura de sesgos se hace en términos de disturbios o perturbación de la gravedad. Para los datos terrestres, se realiza la transformación del datum horizontal y gravimétrico, y a su vez, se realiza la validación de duplicados, verificación de posiciones y detección de atípicos.

Que para el cálculo del modelo QgeoidCOL2023 en sus diferentes etapas se utilizaron las funciones de base radial esféricas (SRBF) y un modelo extendido de Gauss-Márkov combinando fuentes heterogéneas de datos para la estimación de los parámetros asociados a las SRBF.

Que el procedimiento de remover/calcular/restaurar se realiza para los disturbios o perturbaciones de gravedad, eliminando las longitudes de onda larga y los efectos topográficos de alta frecuencia. La longitud de onda larga se calcula a partir del modelo geopotencial global de gravedad XGM2019 hasta grado y orden 719. En cuanto a la onda corta (efectos topográficos) se usa el modelo dv_ELL_Earth2014 de grado y orden 720 hasta 2159 y el modelo de terreno residual ERTM2160 de grado y orden 80000.

Que la anomalía de altura se determina a partir de los parámetros estimados del Modelo extendido y combinado de Gauss-Márkov haciendo uso de las funciones de base radial esféricas (SRBF) acondicionadas para el cálculo del potencial de perturbación y la gravedad teórica en el teluroide.

Que el modelo QgeoidCOL2023 se entregara en conjunto con las desviaciones estándar de las anomalías de altura.

Que la resoluciones espectrales y espaciales del modelo QGeoidCOL2023 son de: 2190 para la expansión de las funciones de base radial esféricas como resolución espectral, y de 5'x5' para la resolución espacial.

Que para efectos de la consistencia del modelo con los datos de GNSS y Nivelación, se tiene una desviación estándar de las diferencias entre las anomalías geométricas y gravimétricas de 21.27cm.

Que, el *Sistema Internacional de Referencia de Alturas – IHRS* (por sus siglas en inglés, *International Height Reference System*) corresponde a un sistema de referencia basado en el geopotencial, que co-rotará con la Tierra. Las coordenadas primarias de dicho sistema son los números geopotenciales $C_p = W_0 - W_p$, definidos a partir de la diferencia entre el potencial de referencia y el potencial en el punto considerado.

Que, el valor del potencial de referencia adoptado por el IHRS es $W_0 = 62\,636\,853.4 \text{ m}^2/\text{s}^2$, y su elipsoide de referencia corresponde al **GRS80** (*Geodetic Reference System 1980*), conforme a lo establecido por **Moritz (2000)**.

Que, la realización práctica del IHRS se denomina **Marco Internacional de Referencia de Alturas – IHRF** (*International Height Reference Frame*), el cual constituye la materialización física del sistema a través de puntos de control geodésico con valores de números geopotenciales determinados con precisión.

Que se hace necesario modificar la regla de denominación de los modelos de geoide establecida en el parágrafo 2 del artículo 1° de la Resolución 068 de 2005, con el fin de armonizarla con los criterios técnicos actuales, esto es, el año de su cálculo.

Que se requiere adoptar de manera oficial la nueva versión del modelo geoidal QGeoidCOL2023 para la captura y procesamiento de datos geodésicos por parte del Gobierno nacional, entidades u organismos públicos o privados y la ciudadanía en general.

Que en cumplimiento del numeral 8 del artículo 8° de la Ley 1437 de 2011 y el artículo 2.1.2.1.21 y siguientes del Decreto 1081 de 2015, el proyecto de Resolución fue publicado en la página web de la Entidad desde el día 20 de noviembre hasta el día 24 del mismo mes de 2025, para comentarios y observaciones de los ciudadanos y grupos de interés, sin embargo, no se recibió ningún comentario.

En mérito de lo expuesto;

RESUELVE:

Artículo 1. Objeto. Adoptar el modelo **QGeoidCOL2023** asociado al datum MAGNA-SIRGAS como nueva superficie de conversión para alturas físicas a partir de las alturas elipsoidales.

Parágrafo. El modelo QGeoidCOL2023 reemplaza el modelo de geoide GEOCOL 2004 adoptado mediante la Resolución 068 de 2005.

Artículo 2. Modifíquese la segunda parte del parágrafo 2 del artículo 1° de la Resolución 068 de 2005, únicamente en lo relacionado con el criterio de denominación de las versiones posteriores del modelo de geoide asociado al datum MAGNA-SIRGAS. El parágrafo quedará así:

“**Parágrafo 2°.** El modelo de geoide asociado al datum MAGNA-SIRGAS será el producto denominado: GEOCOL 2004, que se adopta oficialmente por esta Resolución. Las versiones posteriores de este modelo de geoide, serán nominados teniendo en cuenta el año de su cálculo y las alturas basadas en los Sistemas de Navegación por Satélite - GNSS (Global Navigation Satellite System) serán referidas adecuadamente a dicho modelo.”.

Artículo 3. Ámbito de aplicación. La aplicación del modelo geoidal **QGeoidCOL2023**, se empleará para la captura y procesamiento de datos geodésicos y generación de productos espaciales por parte del Gobierno nacional, entidades u organismos públicos o privados y la ciudadanía en general.

Artículo 4. Uso y divulgación. El uso del modelo **QGeoidCOL2023** deberá realizarse conforme a los parámetros y especificaciones técnicas indicados en el anexo técnico de la presente Resolución. El uso, interpretación y resultados obtenidos mediante la aplicación del modelo serán de exclusiva responsabilidad del usuario.

La información correspondiente al modelo **QGeoidCOL2023** será puesta a disposición por parte del Instituto Geográfico Agustín Codazzi en las plataformas oficiales, dentro del término de un (1) año contado a partir de la publicación de la presente Resolución.

El modelo se publicará de manera gratuita por parte del IGAC, en las plataformas oficiales del Instituto, bajo la licencia **Creative Commons CC BY 4.0**, y podrá ser difundida igualmente en los portales o repositorios oficiales de carácter internacional que requieran esta información geodésica.

Artículo 5. Implementación progresiva. La adopción e implementación del modelo **QGeoidCOL2023** se realizará de forma progresiva por parte de los usuarios, mientras el

IGAC culmina el proceso de divulgación y pone a disposición la totalidad de la información técnica necesaria, conforme a lo establecido en el artículo anterior.

Según lo establecido en el artículo anterior, una vez finalizado el término de **un (1) año** previsto para la divulgación del modelo **QGeoidCOL2023**; la generación, procesamiento y validación de información oficial de alturas físicas para Colombia, deberá realizarse únicamente con base en el modelo adoptado mediante la presente Resolución.

Parágrafo. Durante el término de implementación progresiva previsto en el presente artículo, podrá continuarse utilizando el modelo de geoide GEOCOL 2004 asociado al datum MAGNA-SIRGAS adoptado mediante la Resolución 068 de 2005.

Artículo 6. Publicación. Publíquese el presente acto administrativo en el Diario Oficial y en la página web oficial del Instituto Geográfico Agustín Codazzi, de conformidad con lo establecido en el artículo 65 de la Ley 1437 de 2011.

Artículo 7. Vigencia y derogatorias. La presente Resolución rige a partir del día siguiente al de su publicación en el Diario Oficial, de acuerdo con lo previsto en la Ley 1437 de 2011, y deroga todas las disposiciones que le sean contrarias, expresamente modifica parágrafo 2 del artículo 1° de la Resolución 068 de 2005.

PUBLÍQUESE Y CÚMPLASE

Dada en la ciudad de Bogotá D.C.

05 MAY 2026



GUSTAVO ADOLFO MARULANDA MORALES
Director General

Anexos: Anexo Técnico

Elaboró: Subdirección Cartográfica y Geodésica

Revisó: Carlos Andrés Franco Prieto – Subdirector de Cartografía y Geodesia
Kelly Johanna Morales Sarmiento – Asesora Jurídica – Dirección General
Andrés Felipe González Vesga – Dirección de Regulación y Habilitación
Camila Gutiérrez Barragán – Jefe Oficina Asesora Jurídica.

Aprobó: Andrés Felipe González Vesga – Dirección de Regulación y Habilitación
Anderson Puentes Carvajal – Director de Gestión de Información Geográfica
Camila Gutiérrez Barragán – Jefe Oficina Asesora Jurídica.

Modelado regional del campo de gravedad de alta resolución en regiones con desafíos de datos para la realización de sistemas de alturas basados en geopotencial.

Qing Liu^{1*}, Michael Schmidt¹, Laura Sánchez¹, Leidy Moisés² and Diego Cortez²

Resumen. Los sistemas modernos de alturas se basan en la combinación de técnicas de posicionamiento satelital y modelos del campo gravitacional de alta resolución. Sin embargo, en muchas regiones, especialmente en países en desarrollo o en proceso de industrialización, no existen modelos regionales de gravedad confiables debido a dificultades como la limitada disponibilidad de datos, calidad desconocida o baja de información y ausencia de metadatos.

Este artículo aborda este problema mediante un estudio de caso en Colombia, donde se dispone de mediciones gravimétricas terrestres y aéreas que abarcan ocho décadas, pero que contienen errores sistemáticos, valores atípicos y sesgos significativos. Se proponen y aplican estrategias y estructuras de procesamiento para validar y mejorar la calidad de los antiguos conjuntos de datos de gravedad.

Se desarrolla un método novedoso basado en funciones de base radial esféricas (SRBF por sus siglas en inglés) para estimar sesgos, los cuales se identifican en diferentes levantamientos aéreos con valores que superan los 40 mGal. La validez de este método de estimación de sesgos se demuestra tanto mediante una prueba de simulación, como mediante la evaluación de los datos aéreos en comparación con el modelo SATOP (Satellite-TOPOgraphy), que combina el modelo global de gravedad satelital GOCO06s con el modelo topográfico Earth2014.

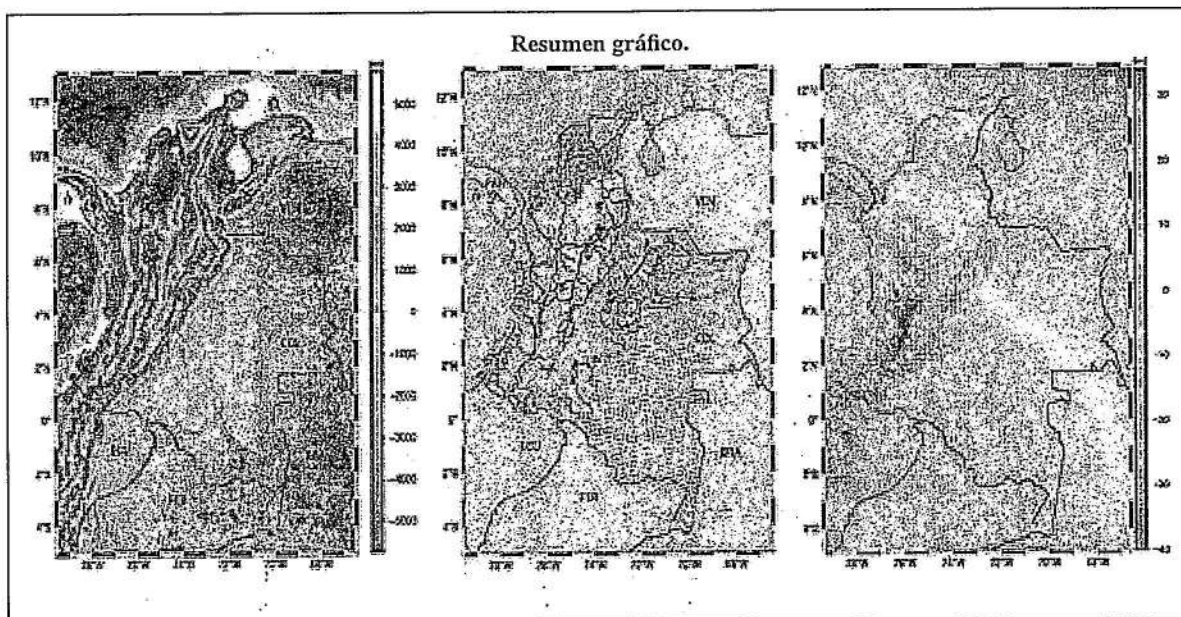
Los datos terrestres y aéreos se combinan con un modelo global de gravedad (GGM) y modelos topográficos de ultra alta resolución junto con anomalías de gravedad derivadas de altimetría del modelo DTU21GRA para las zonas marinas.

Los resultados se presentan en términos de anomalías de altura (QGeoidCOL2023) y se validan exhaustivamente utilizando datos GPS/nivelación, tanto en forma absoluta como relativa. La desviación estándar en comparación a los datos de GPS/Nivelación, después de aplicar una superficie de corrección para tener en cuenta las inconsistencias del datum asciende a 15.76 cm, lo cual es 27 % menor en comparación con el valor medio de la desviación estándar dado por cinco modelos globales (GGM) recientes de alta resolución, y 36 % menor que el proporcionado por el modelo cuasigeoidal sudamericano más reciente QGEOID2021.

Los resultados de validación relativa muestran que QGeoidCOL2023 ofrece mejor desempeño, es decir, proporciona errores RMS más bajos que los de GGM y que QGEOID2021 en todos los grupos de longitud de línea base. Estos resultados indican la validez y los beneficios de los métodos y procedimientos desarrollados, los cuales pueden ser usados para otras áreas con limitaciones de datos, para facilitar la realización de sistemas de alturas basados en el geopotencial

Keywords: Modelado regional de cuasigeoide; funciones de base radial esféricas; combinación de datos de gravedad heterogéneos; validación GPS/nivelación; sistemas de alturas basados en geopotencial; sistema y marco internacional de referencia de alturas.

*Correspondence: Qing Liu
qingqing.liu@tum.de
Author information at end of article.



1 Introducción

La combinación de técnicas de posicionamiento satelital, como el Sistema de Posicionamiento Global (GPS), con modelos geoidales o cuasigeoidales de alta resolución proveen una alternativa precisa y eficiente a la nivelación clásica, la cual es costosa y requiere mucho tiempo, para la determinación de alturas físicas. En regiones con infraestructura geodésica avanzada, se ha demostrado que las alturas físicas derivadas del GPS y un modelo geoidal o cuasigeoidal preciso pueden alcanzar exactitudes entre 2 y 10 cm (Wang et al., 2021; Sánchez et al., 2021). En regiones con infraestructura menos desarrollada, las incertidumbres pueden llegar hasta 40 cm, y en casos extremos, alrededor de 1 m en áreas con fuertes gradientes topográficos (Rummel et al., 2014; Gruber y Willberg, 2019). La principal limitación de precisión en estas regiones es la baja disponibilidad o calidad de los datos de gravedad superficiales, es decir, terrestres, aéreos o marítimos. Dadas las restricciones económicas en algunas regiones y la imposibilidad de realizar mediciones gravimétricas sistemáticas para mejorar la cobertura y distribución de los datos, uno de los desafíos actuales es recuperar la mayor cantidad posible de levantamientos gravimétricos existentes usando métodos matemáticos modernos que permitan la evaluación y el refinamiento de datos de gravedad adquiridos hace mucho tiempo o que carecen de procedimientos estandarizados y metadatos.

Mientras que en los sistemas de alturas basados en nivelación, el datum vertical, es decir, el nivel de referencia cero se realiza a partir del nivel medio del mar determinado en un mareógrafo seleccionado de manera arbitraria; en un sistema de alturas basado en el geopotencial, el datum vertical se realiza mediante un modelo de geode o cuasigeode.

En sentido estricto, las coordenadas verticales son diferencias de potencial o números geopotenciales C con respecto a un valor W_0 adoptado convencionalmente, cuya realización debería ser el geode.

Dado que el geode y el cuasigeode son prácticamente idénticos en las zonas marinas, el cuasigeode también es ampliamente aceptado como la realización de un datum vertical.

Sin embargo, vale la pena aclarar que el cuasigeode no es una superficie equipotencial. En este estudio, seguimos las convenciones del Sistema Internacional de Referencia de Alturas (IHRF, por sus siglas en inglés; Ihde et al., 2017).

El IHRF es un sistema de referencia basado en el geopotencial que rota conjuntamente con la Tierra. Sus coordenadas principales son los números geopotenciales $C = W_0 - W$, que se refieren al valor de potencial $W_0 = 62636853.4 \text{ m}^2/\text{s}^2$ (Sánchez et al., 2016). Las posiciones espaciales de las estaciones donde se calculan los números geopotenciales se definen mediante las coordenadas (X, Y, Z) en el Marco Internacional de Referencia Terrestre (ITRF) (Altamimi et al., 2023). El elipsoide de referencia es el GRS80 (Geodetic Reference System 1980) (Moritz, 2000).

La realización del IHRF es el Marco Internacional de Referencia de Alturas (IHRF), el cual corresponde a una red global de estaciones de referencia con coordenadas precisas especificadas en el IHRF (Sánchez et al., 2021).

En este contexto, el objetivo de este trabajo es evaluar la viabilidad de una realización precisa del IHRF en regiones con calidad y distribución de datos de gravedad difíciles o limitadas. El área de estudio es Colombia, el único país sudamericano con costas en los dos océanos —Pacífico y Atlántico—. El país presenta fuertes gradientes topográficos, con elevaciones que superan más

que 5000 m sobre el nivel medio del mar, y una gran extensión de cerca del 40% del territorio cubierta por la selva amazónica.

Nuestra investigación se basa en la determinación del cuasigeoide usando el método de las funciones de base radial esféricas (SRBF, por sus siglas en inglés) (Freedman et al., 1998, entre otros). Aunque se trata de un enfoque relativamente nuevo en comparación con, por ejemplo, la integral de Stokes y la colocación por mínimos cuadrados (LSC), las SRBF han adquirido gran interés y se han aplicado ampliamente en la modelación regional del campo de gravedad durante las últimas dos décadas (por ejemplo, Schmidt et al., 2007; Wittwer, 2009; Bentel, 2013; Lieb et al., 2016; Wu et al., 2017). Asimismo, se han logrado avances adicionales por parte de diferentes grupos de investigación; por ejemplo, se han propuesto estrategias para una elección adecuada de los parámetros de las SRBF (e.g., Klees et al., 2008; Bentel, 2013), se han desarrollado nuevos enfoques de regularización (e.g., Eicker et al., 2014; Liu et al., 2020a), y se han perfeccionado métodos para una representación multiresolución basada en SRBF para la combinación espectral (e.g., Schmidt et al., 2006; Liu et al., 2022). Las principales ventajas de las SRBF es que son computacionalmente fáciles de implementar y permiten manejar las observaciones de gravedad directamente en sus posiciones originales, sin necesidad de aplicar procedimientos de mallado o interpolación (e.g., Wittwer, 2009; Li, 2018). En 2017, cuatro grupos científicos, bajo el auspicio de la Asociación Internacional de Geodesia (IAG), establecieron el "Experimento del Geoide de 1 cm" (Wang et al., 2021) con el fin de evaluar la repetibilidad de la determinación de coordenadas IHRF utilizando diferentes métodos de modelado del campo de gravedad en un área de estudio en Colorado, EE. UU. Entre 14 grupos participantes a nivel mundial que emplearon distintas metodologías, el modelo de cuasigeoide basado en SRBF (Liu et al., 2020b) presentó una desviación estándar (STD) de 2.64 cm en comparación con los datos de GPS/nivelación, ubicándose entre los cinco modelos con mejor concordancia. Debido a los retos asociados a la calidad de los datos en Colombia, se desarrollan enfoques novedosos para generar un modelo de cuasigeoide con la mayor precisión posible. Para ser más específicos, dado que los primeros levantamientos terrestres se realizaron antes de la era del GPS, las posiciones de dichas observaciones se obtenían frecuentemente a partir de mapas. Luego, errores sistemáticos y equivocaciones en los registros de datos necesitaron ser revisados. Los datos aéreos provienen de 17 campañas de vuelo, y los conjuntos de datos disponibles ya han sido post-procesados, es decir, reducidos a una superficie de referencia por separado. Se realizó una evaluación de los datos utilizando un modelo combinado de satélite y topografía (SATOP, Zingerle et al., 2019), y los resultados muestran que cada levantamiento aéreo tiene una diferencia media distinta con respecto al SATOP, con el valor más grande alcanzado de más de 40 mGal en términos de perturbación de gravedad. Esto indica que existen sesgos significativos entre las diferentes campañas aéreas. Por tanto, es fundamental eliminar dichos sesgos grandes antes del procedimiento de combinación, para evitar errores indeseados. Li (2018,

2021) propone un modelo de estimación de sesgos basado en las SRBF y demuestra que este puede utilizarse para eliminar los sesgos en distintas líneas de vuelo aéreas. Al añadir sesgos artificiales entre -1 mGal y 1 mGal a los datos aéreos simulados, los resultados muestran que el sesgo estimado para cada línea de vuelo concuerda bien con los sesgos introducidos. Sin embargo, el modelo de Li se basa en la suposición de que el valor medio de los sesgos en todas las líneas de vuelo es igual a 0, lo cual no es el caso para diferentes levantamientos aéreos, y solo ha sido verificado para sesgos pequeños, es decir, dentro del rango ± 1 mGal. En Colombia, enfrentamos valores de sesgos significativos que superan los 40 mGal, y el valor medio de los sesgos entre diferentes levantamientos no es cercano a 0. Por lo tanto, en este estudio, adicionalmente se desarrollamos procedimientos para estimar los sesgos en diferentes levantamientos aéreos usando el método de las SRBF, y su validez se demuestra tanto con observaciones aéreas simuladas como reales. Los datos terrestres y aéreos son combinados luego con un modelo global de gravedad (GGM) y modelos topográficos, los cuales juegan un papel importante en las zonas montañosas, dentro del procedimiento de eliminar – calcular – restaurar (RCR, por sus siglas en inglés). En las zonas marítimas, datos de gravedad derivados de altimetría satelital son adicionalmente incorporados, los cuales son obtenidos de la versión más reciente de la grilla de anomalías de gravedad de la Universidad Técnica de Dinamarca (DTU), DTU-21GRA (Anderson, comunicación personal, 2022). La relevancia de este estudio radica en cuatro aspectos:

(1) Antes de este trabajo, el único modelo regional de cuasigeoide disponible para Colombia había sido calculado en 2003 (véase el Servicio Internacional de Geoide —ISG¹), aún antes de la disponibilidad de las observaciones satelitales de gravedad provenientes de las misiones GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment, Tapley et al., 2004) y GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer, Rummel et al., 2002). En consecuencia, su precisión se reportó en 1.33 m en términos de desviación estándar (STD) compadara con los datos de GPS/nivelación (Sánchez y Sideris, 2017), lo cual no cumple con los requisitos necesarios para la realización de un sistema de alturas basado en el geopotencial, ni para ninguna aplicación significativa en la actualidad. Por lo tanto, existe una necesidad urgente de calcular un nuevo modelo, tanto con fines científicos como prácticos.

(2) Colombia es un área de estudio desafiante, reconocida por su topografía variable (véase Fig. 1a). Los Andes atraviesan la parte occidental del país, con elevaciones altas que alcanzan más que 5000 m y topografía escarpada; la región sudoriental del país está cubierta por la selva amazónica, en la cual resulta prácticamente imposible realizar levantamientos gravimétricos terrestres.

(3) Se procesan y utilizan todos los tipos de datos gravimétricos disponibles actualmente, recolectados a lo largo de ocho décadas. Los datos de gravimetría y

¹International Service for Geoid (ISG): https://www.isgeoid.polimi.it/Geoid/America/Colombia/colombia04_g.html

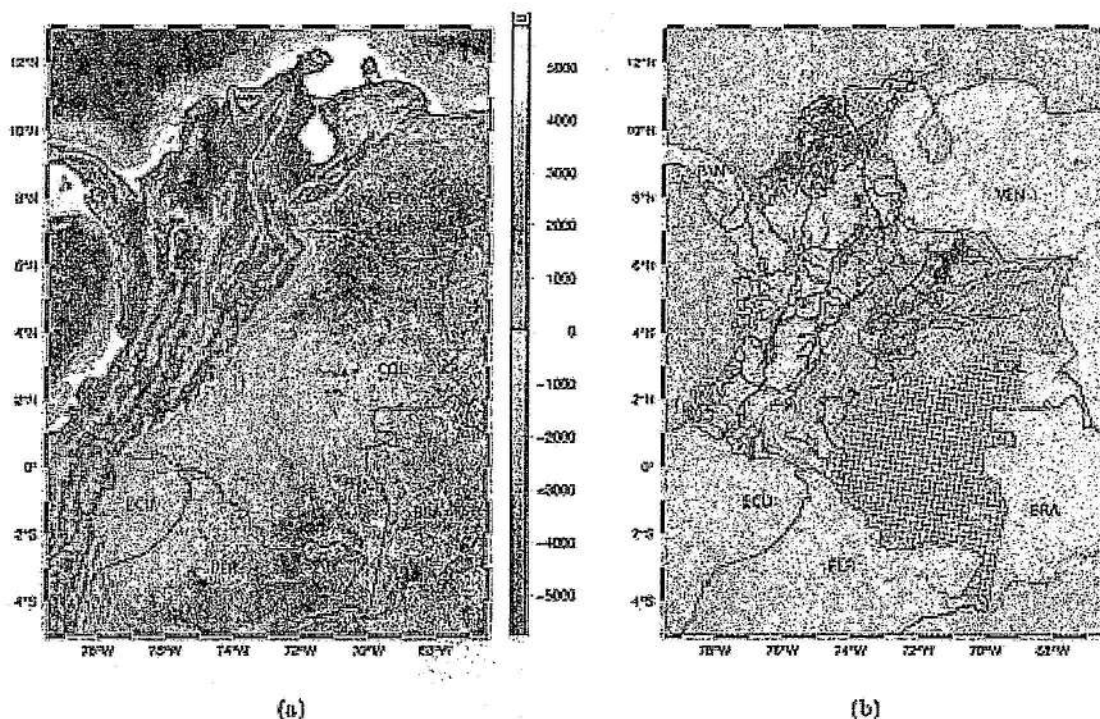


Figure 1: a Mapa topográfico del área de estudio; b datos gravimétricos disponibles, incluyendo datos terrestres (puntos rojos), aerotransportados (trayectorias de vuelo verdes) y de altimetría (puntos azules), así como datos GPS/nivelación (puntos negros) para fines de validación

altimetría satelital se combinan con datos regionales terrestres y aéreos, y las componentes de longitud de onda muy corta se tienen en cuenta incluyendo modelos topográficos actualizados. Además, el modelo de cuasigeoide calculado se valida exhaustivamente utilizando datos independientes de GPS/nivelación.

(4) Los procedimientos de cálculo desarrollados en este estudio para manejar datos gravimétricos de baja - y desconocida - calidad poseen importantes implicaciones prácticas y pueden aplicarse en otras regiones en desarrollo para la realización del IHRIS o de cualquier sistema de alturas basado en el geopotencial.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera: en la sección "Área de estudio y procesamiento de datos", se presentan los datos disponibles dentro del área de estudio y se explican en detalle los diferentes procedimientos de pre-procesamiento aplicados a las observaciones terrestres y aéreas.

La sección "Metodología" está dedicada a las metodologías empleadas, donde se introducen brevemente los fundamentos de las SRBF y la estimación de parámetros. Además, se explica el método desarrollado para la estimación de sesgos basado en las SRBF. La sección "Configuración del cálculo" documenta el procedimiento computacional, incluyendo la estimación de sesgos en los datos aéreos, el procedimiento de eliminar - calcular - restaurar (RCR) y la configuración del modelo.

La sección "Resultados, validación y discusión" presenta el modelo de cuasigeoide calculado para Colombia y ofrece una validación exhaustiva, en comparación tanto con los datos de GPS/nivelación y

modelos geopotenciales globales GGM de alta resolución recientes.

Finalmente, la sección "Conclusiones" resume los hallazgos y brinda algunas conclusiones y recomendaciones.

2 Área de estudio y procesamiento de datos

El área de estudio abarca Colombia y parte de sus zonas terrestres y marítimas circundantes, es decir, entre $-79,5^\circ$ y $-66,5^\circ$ de longitud y entre -5° y 13° de latitud. La Figura 1(a) muestra el mapa del relieve del área de estudio: la parte oriental se caracteriza por un terreno relativamente plano. En la parte occidental, los Andes se extienden a lo largo de todo el territorio en dirección norte-sur, cerca de la costa, contribuyendo a un terreno complejo, con profundidades que alcanzan alrededor de 5000 m por debajo del nivel del mar y elevaciones que superan los 5000 m sobre este. Tal terreno accidentado y, por tanto, el campo gravitacional variable hacen que la determinación del cuasigeoide sea un reto considerable. La Figura 1(b) muestra los datos gravimétricos disponibles: observaciones terrestres de gravedad desde el año 1940, 17 levantamientos aerogravimétricos realizados desde el año 2000, así como datos de GPS/nivelación los cuales fueron proporcionados por el Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC), el Servicio Geológico Colombiano y la empresa petrolera Ecopetrol.

2.1 Datos de gravedad terrestre

Los datos terrestres (puntos rojos en la Figura 1b) en Colombia provienen de 101 levantamientos gravimétricos, con un total de 65.763 puntos de observación realizados entre los años 1941 y 2000 con fines de exploración de petróleo y gas, así como para estudios geofísicos. Estos levantamientos se llevaron a cabo principalmente en la parte occidental del país, y su distribución no es homogénea. Los datos terrestres se presentan en términos de valores absolutos de gravedad junto con la latitud ϕ_{local} y la longitud λ_{local} referidas al datum geodésico local, y la altura física H referida al datum vertical local. Aunque no se conoce con precisión la exactitud de las mediciones debido a la falta de metadatos, no se espera que sea alta considerando que los datos terrestres fueron recolectados por diferentes levantamientos a lo largo de seis décadas del siglo pasado. Las posiciones horizontales y verticales de las observaciones más antiguas fueron frecuentemente leídas de mapas. Por lo tanto, errores sistemáticos y registros errados necesitan ser verificados. Los siguientes pasos de pre-procesamiento fueron aplicados a los datos terrestres:

1. Las coordenadas horizontales de los datos terrestres recolectados en Colombia se refieren al datum geodésico local (Datum Bogotá), el cual presenta desplazamientos de hasta 500 m con respecto al ITRF. Esta diferencia puede causar un desplazamiento vertical de varios cientos de metros en los Andes, y en consecuencia, los efectos topográficos pueden estar mal representados debido a grandes errores sistemáticos (Sánchez et al., 2021). Por lo tanto, es necesario realizar una transformación de coordenadas desde el datum local (ϕ_{local} , λ_{local}) hacia el ITRF (ϕ , λ).

$$\phi = \phi_{local} - 0.00278^\circ \quad (1)$$

$$\lambda = \lambda_{local} - 0.00333^\circ \quad (2)$$

Véase IGAC (2004) para más detalles.

2. Valores duplicados en los datos terrestres, es decir, varios registros de gravedad ubicados en la misma posición son revisados (Liu et al., 2020b). Para ser más específicos, en tales casos, si las observaciones en la misma posición difieren menos que 2 mGal de las otras, solo se conserva un registro. De lo contrario, si las diferencias son mayores a 2 mGal, todas las observaciones se eliminan. Este paso resulta en la eliminación de 2692 puntos.
3. Dado que gran parte de las mediciones se realizaron antes de la era del GPS, y sus posiciones horizontales y verticales fueron tomadas manualmente de mapas, pueden existir errores en los registros. Para verificar posibles errores en los valores de altura, así como discrepancias entre posiciones horizontales y verticales, las alturas físicas H se comparan con las alturas obtenidas del modelo del terreno de alta resolución SRTM (Hirt et al., 2014) en cada punto de observación. Grandes diferencias de altura $\Delta H = H - H_{SRTM}$ indican que los valores de altura pueden ser problemáticos o no coincidir con las

coordenadas horizontales; por tanto, esos puntos deben excluirse. Los datos se agrupan en dos categorías, área montañosa (con elevación ≥ 2000 m) y área moderada (elevación < 2000 m). Para cada categoría, la regla de tres sigmas usando la media y la desviación estándar (σ) de ΔH es aplicada para identificar valores anómalos en las diferencias de alturas. Este paso resulta en la eliminación de 1177 puntos de datos.

4. Transformación de las alturas físicas H en los datos terrestres a alturas elipsoidales h , utilizando el modelo cuasigeoidal más reciente para Sudamérica QGEOID2021 (Matos et al., 2021), disponible en el ISG. La razón para usar un modelo geoidal local en lugar de un modelo global de alta resolución GGM para la transformación de altura es mantener la coherencia con las alturas físicas, las cuales se refieren a la media local del nivel del mar.
5. Como las mediciones terrestres se realizaron en el datum de gravedad de Potsdam, una constante de 14 mGal es restada de los valores de gravedad para transformarlos al datum IGSN71 (International Gravity Standardization Net 1971) (Morelli et al., 1971).
6. Transformar las observaciones en términos de gravedad absoluta g a perturbación de gravedad δg , restando la gravedad normal γ en el sitio de observación, referida al elipsoide GRS80 (Moritz, 2000), es decir: $\delta g = g - \gamma$ (Heiskanen & Moritz, 1967).
7. Detección de valores atípicos: después de aplicar el procedimiento RCR (véase la sección "Remover – Calcular – Restaurar" para más detalles) con un modelo de gravedad global GGM y un modelo topográfico, las partes residuales de las perturbaciones de la gravedad terrestre $\Delta \delta g$ son revisadas para identificar valores atípicos siguiendo los procedimientos: (a) Primero, la regla de tres sigmas utilizando la mediana (Mdn) y la desviación mediana absoluta normalizada (NMAD) de los valores $\Delta \delta g$ es aplicada para identificar potenciales valores atípicos. Más específicamente, los puntos de datos que tienen $\Delta \delta g$ mayores que $[Mdn + 3 \cdot NMAD]$ o menores que $[Mdn - 3 \cdot NMAD]$ se marcan como potenciales valores atípicos, y todos los otros puntos son identificados como no atípicos. (b) Para esos puntos de datos marcados como potenciales valores atípicos, sus valores de perturbación de la gravedad $\Delta \delta g$ son revisados usando las observaciones no atípicas. En particular, para cada punto potencial atípico, una ventana de 10 km $\times$ 10 km es aplicada, y todos los puntos no atípicos dentro de esta ventana son usados para interpolar $\Delta \delta g_{imp}$ en este punto, empleando el algoritmo de interpolación por distancia inversa ponderada (IDW). Después de este paso, un valor interpolado $\Delta \delta g_{imp}$ es obtenido para cada potencial valor atípico. Vale la pena mencionar que existen otros métodos para la detección de valores atípicos también, por ejemplo, interpolando los

valores de gravedad a partir de los registros vecinos usando colocación por mínimos cuadrados LSC (véase, por ejemplo, Vergos et al., 2005), el cual es especialmente útil en casos de estudio donde una estimación apropiada de los errores de medición es posible. (c) El valor de $\Delta\delta g_{imp}$ es comparado con $\Delta\delta g$ en cada punto potencial atípico, y aquellos con diferencias más grandes que un umbral ε son finalmente marcados como valores atípicos y se eliminan del conjunto de datos. El valor umbral ε es seleccionado como el percentil 95% de la función de distribución acumulada (CDF) de los valores absolutos de todos los $\Delta\delta g$ del conjunto de datos (Varga et al., 2021), lo que equivale a 19 mGal para los datos terrestres. Una cantidad total de 570 puntos de observación fueron marcados como valores atípicos y excluidos. La razón para usar la mediana en lugar de la media es que la primera es menos sensible a valores atípicos y resulta más adecuada para conjuntos de datos no normalizados tales como las observaciones gravimétricas (véase Varga et al., 2021, para más detalles).

2.2 Datos de gravedad aérea

Los datos de gravedad aérea (trayectorias de vuelo en verde en la figura 1(b)) consisten en 17 campañas aéreas realizadas entre 2005 y 2010, con altitudes medias de vuelo que varían entre 1200 m a 6400 m. Estas cubren principalmente la parte oriental de Colombia, compensando la ausencia de datos terrestres en esta región, especialmente en la selva amazónica. Los levantamientos aéreos también llenan algunas brechas de datos causadas por las campañas terrestres en la zona montañosa del norte, es decir, entre las latitudes 9° N y aproximadamente 12° N. El levantamiento sobre la selva amazónica tiene la más baja resolución espacial a lo largo de la trayectoria de alrededor de 100 m, comparado a los otros 16 levantamientos, los cuales alcanzan una resolución de alrededor 50 m. La resolución transversal varía entre 1 km a 20 km, pero en promedio es cercano a 10 km. Los datos de gravedad aérea se proporcionan en términos de anomalías de aire libre junto con la latitud y longitud en el ITRF, altura elipsoidal, y la corrección de aire libre (F) aplicada. Como los datos aéreos han sido posprocesados y los metadatos correspondientes no están disponibles, podrían haberse introducido inconsistencias entre diferentes campañas. Por tanto, conocer la precisión de cada levantamiento aéreo así como posibles efectos sistemáticos es requerido antes de utilizar los datos de gravedad aérea para el cálculo del cuasigeoide (Zingerle et al., 2019). En consecuencia, los siguientes pasos de preprocesamiento son aplicados:

1. Recuperar los valores de gravedad g en los puntos de observación a partir de la anomalía del aire libre Δg_F mediante

$$g = \Delta g_F + \gamma_0 - F. \quad (3)$$

donde γ_0 es la gravedad normal en el elipsoide de referencia (Heiskanen y Moritz, 1967). Luego, el valor de gravedad g es transformado en perturbación

de gravedad δg restando la gravedad normal GRS80 γ a la altura de observación.

2. Para tener una idea clara de la precisión de los datos, un análisis de cruzado (por ejemplo, Forsberg y Olesen, 2010) es llevado a cabo para cada levantamiento aéreo. Las diferencias de gravedad en los puntos de cruce de las trayectorias de vuelo intersectadas reflejan la calidad de los levantamientos aéreos (Smith et al., 2013). En este estudio, el error RMS de las discrepancias obtenidas en los puntos de cruce de las 17 campañas se estima entre 0.23 mGal a 2.40 mGal con un valor medio de 0.67 mGal, lo que sugiere que las 17 campañas aéreas tienen diferente precisión en los datos.
3. Un filtro gaussiano paso-bajo a lo largo de las trayectorias (ver Willberg et al., 2020) es aplicado a los datos aéreos para reducir el ruido de alta frecuencia, lo cual es un procedimiento estándar en el procesamiento de datos aéreos. Forsberg y Olesen (2010) señalan que todo tipo de observaciones aéreas requieren filtrado, y que los filtros paso-bajo deben ser aplicados porque en la parte de baja frecuencia de las mediciones aéreas, la señal de gravedad domina el ruido (Childers et al., 1999).
4. Verificar por posibles errores sistemáticos, los datos aéreos son luego evaluados en comparación con el modelo SATOP (Zingerle, 2022). Este combina el modelo global de gravedad satelital GOCO06s (Kvas et al., 2021), el cual es muy preciso en la parte de baja frecuencia y el modelo topográfico Earth2014 (Rexer et al., 2016). SATOP es elegido para la evaluación debido a razones: 1. Como señalan Zingerle et al. (2019), el modelo usado para la evaluación de datos ha de ser verdaderamente independiente de cualquiera de las observaciones que están siendo evaluadas. 2. Con un total de 1,775,140 observaciones aéreas a ser evaluadas, es muy demorado calcular valores de gravedad directamente de un GGM. Mientras que, SATOP permite manejar eficientemente grandes volúmenes de datos. La Figura ??(a) muestra las diferencias entre los datos aéreos y el modelo SATOP (limitado al grado y orden 719, según Zingerle et al., 2019). Las diferencias tienen un valor medio de 8.38 mGal y una desviación estándar de 16.70 mGal. Los datos aéreos, especialmente algunas campañas, presentan grandes diferencias medias en comparación con SATOP, lo cual revela errores de longitud de onda larga, es decir, sesgos en estos levantamientos aéreos. La Figura ??(b) muestra en detalle las diferencias de cada levantamiento aéreo respecto a SATOP y lista sus valores medios y desviaciones estándar. Nótese que el número del levantamiento es ordenado por la elevación de cada área de vuelo en un orden ascendente. La mayoría de los levantamientos muestran desviaciones estándar de menos que 20 mGal con relación al modelo SATOP, lo cual es aceptable. Además, la desviación estándar muestra un patrón de incremento con elevación incrementada. Esto es razonable porque el modelo SATOP por

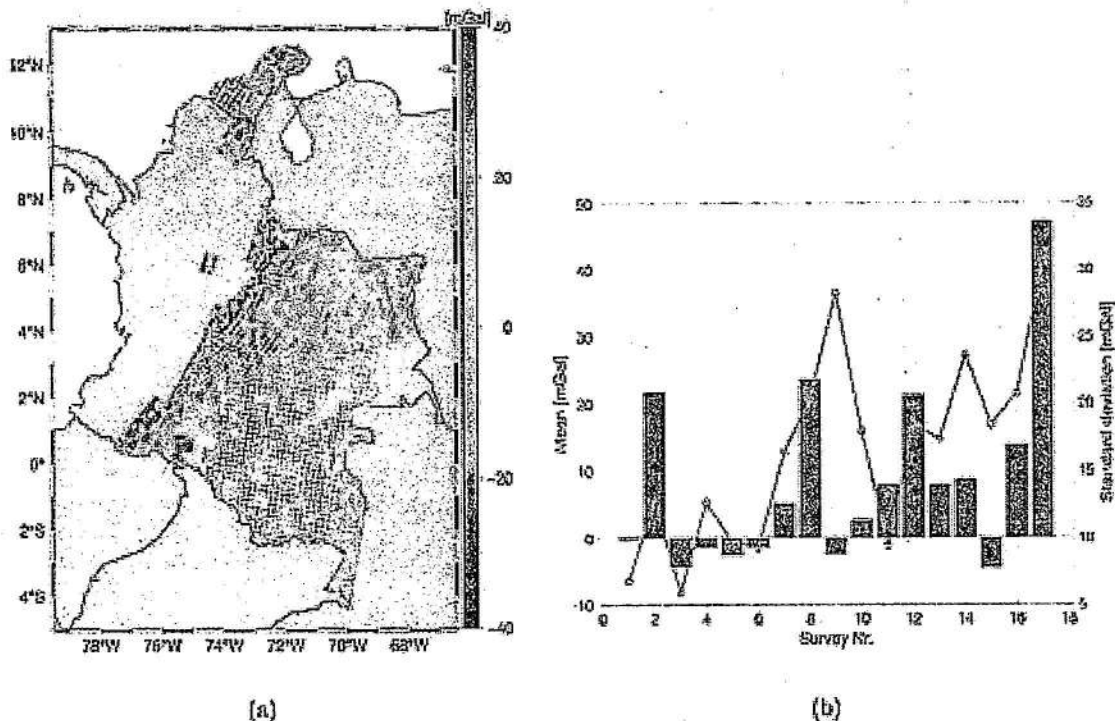


Figura 2. a Diferencias entre los datos de gravimetría aérea y el modelo SATOP en términos de perturbaciones de gravedad; b los valores medios y desviación estándar de las diferencias para cada levantamiento aéreo.

encima del grado y orden 300 se basa únicamente en el modelo de topografía usando un valor constante de densidad de masa, el cual no puede representar la verdadera señal de gravedad de alta frecuencia exactamente, especialmente en áreas montañosas. Sin embargo, los valores medios de las diferencias son bastante grandes, variando de -4.54 mGal a 47.32 mGal para diferentes levantamientos. Esto sugiere que existen grandes sesgos en los levantamientos aéreos, dado que el modelo de gravedad satelital es preciso en la parte de longitud de onda larga. Una posible razón para estos grandes sesgos podría ser el post-procesamiento de cada campaña aérea por diferentes organizaciones en distintos momentos. Se espera que estos sesgos en los datos aerogravimétricos tengan un impacto significativo en la anomalía de altura determinada. Por ejemplo, Varga et al. (2021) mostraron que un sesgo de 3 mGal en los datos aéreos puede causar un sesgo de hasta 30 cm en el geoide calculado. Por lo tanto, estos sesgos necesitan ser manejados y eliminados para obtener resultados de modelado significativos. Un método de estimación de sesgos basado en SRBFs es presentado en la sección “Estimación de sesgos utilizando SRBFs”, y los resultados correspondientes son reportados en la sección “Sesgo de los datos aéreos”.

- Como los datos aéreos tienen una distribución muy densa con 1.775.140 puntos de observación, usar todo el conjunto de datos resultaría en una matriz de diseño de 399 GB (véase la sección “Modelo de estimación”). Además, las observaciones aéreas consecutivas están altamente correlacionadas después

del filtrado de paso bajo, lo que permite una reducción significativa en la frecuencia de muestreo (Willberg et al. 2020). Por lo tanto, se realizó un muestreo reducido de los datos aéreos a una resolución espacial promedio a lo largo de la trayectoria de aproximadamente 5 km, lo cual representa un buen equilibrio entre mantener la información gravitacional y mejorar la eficiencia computacional, esta es una práctica común en la modelación de cuasigeoides (véase, por ejemplo, Wang et al. 2021). Para el levantamiento sobre la Amazonia, se obtiene una resolución espacial de 5 Km de 100m, únicamente una observación de un bloque de cincuenta observaciones es mantenida, es decir, el intervalo de muestreo se redujo de 1 Hz a 1/50 Hz. Para los otros 16 levantamientos, una observación de un bloque de cien observaciones es mantenido para obtener una resolución espacial de 5 km de 50 m.

- Detección de valores atípicos: después de realizar la corrección de sesgos y el muestreo reducido de los datos aéreos, una detección de valores atípicos también es realizado de la misma manera para los datos terrestres, es decir, como se explicó en el Paso 7 del preprocesamiento de los datos terrestres (véase la sección “Datos de gravedad terrestre”). Una cantidad total de 335 puntos de observación fueron marcados como valores atípicos y excluidos correspondientemente.

2.3 Datos de Altimetría

En la zona oceánica, datos de gravedad derivados de misiones altimétricas, específicamente la versión más reciente del modelo de anomalía de gravedad DTU21GRA (Anderson, comunicación personal, 2022) son usados. Adicionalmente incluye 5 años de datos de Sentinel-3A, 3 años de Sentinel-3B así como datos reprocesados de CryoSat-2, comparado con su versión anterior DTU17GRA, que fue desarrollada con datos de altimetría satelital sobre los océanos de las misiones ERS-1/2, Envisat, CryoSat-2, Jason-1 y SARAL/AltiKa. Para la serie de anomalía de gravedad del DTU, las versiones más recientes típicamente muestran mayor precisión comparadas a las anteriores cuando se comparan con datos de gravedad regional aérea o de barcos (Andersen y Knudsen, 2020). Wu et al. (2022) demostrando que la inclusión de los datos altimétricos SAR de Sentinel-3A/B en DTU21GRA mejora la precisión en el modelado del cuasigeoide marino, especialmente sobre las regiones cercanas a los continentes y las islas. Sus resultados además muestran que este modelo altimétrico de gravedad recientemente publicado contiene señales adicionales que fueron no resueltas en los modelos globales de gravedad (GGM) de alta resolución actualmente disponibles. Por lo tanto, la grilla de anomalía de gravedad de $2' \times 2'$ de DTU21GRA (puntos azules en la Figura 1(b)) es usada como datos de gravedad para la zona oceánica en este estudio.

2.4 Datos de validación

Datos de GPS/Nivelación en Colombia son usados para la validación del cuasigeoide, los cuales consisten de 3209 puntos de referencia GPS/nivelación (puntos negros en la Fig. 1b). Estos datos se encuentran mayormente ubicados en la parte occidental de Colombia, coincidiendo con la distribución de las observaciones terrestres a lo largo de las principales carreteras del país. Las cantidades medidas incluyen la altura elipsoidal (h), las alturas normales (H^*) referidas al sistema local de referencia de alturas, y las anomalías de altura correspondientes $\zeta = h - H^*$. Estos datos fueron medidos en las últimas décadas y su precisión no es conocida. Por lo tanto, valores atípicos en las anomalías de altura fueron revisados mediante la regla de tres sigmas utilizando la mediana, es decir, en analogía al Paso 7 del preprocesamiento de los datos terrestres, comparando con QGeoid2021. Un remanente de 3025 puntos de datos fue usado para la validación.

3 Metodología

3.1 Funciones de Base Radial Esféricas (SRBF)

Las SRBF son una herramienta adecuada para el modelado regional del campo de gravedad por considerar la heterogeneidad de diferentes fuentes de datos, debido a sus propiedades de localización. En general, una SRBF $B(x, x_k)$ entre un punto de observación P y un punto de

mallado P_k sobre una esfera Ω_R de radio R , es definida por las series de Legendre:

$$B(x, x_k) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} B_n P_n(r^T r_k) \quad (3)$$

(Freedman et al. 1998; Schmidt et al. 2007), donde $x = r \cdot r$ es el vector de posición del punto de observación $P(\varphi, \lambda, r)$ con

$$r = [\cos \varphi \cos \lambda \cos \varphi \sin \lambda \sin \varphi]^T$$

siendo el vector unitario correspondiente. A su vez,

$$x_k = R \cdot r_k$$

es el vector de posición del punto de grilla P_k . P_n es el polinomio de Legendre de grado n , y $n_{\max}$ el grado máximo de la expansión. Los coeficientes B_n son los coeficientes de Legendre que determinan la forma de las SRBFs. En el caso de que $B_n = 1$ para todos los grados $n = 0, 1, \dots, n_{\max}$, la SRBF corresponde al kernel de Shannon.

Una observación gravitacional $y(x)$ puede representarse como una expansión en serie de las SRBF:

$$y(x) + e(x) = \sum_{k=1}^K d_k B(x, x_k) \quad (4)$$

donde K y d_k representan, son el número de funciones base y los coeficientes de la serie correspondientes, respectivamente. El término $e(x)$ incluye el error de observación y el error de truncamiento. Para describir diferentes funcionales gravitacionales, por ejemplo, la perturbación de la gravedad δg y la anomalía de gravedad Δg , la expresión general de las funciones base $B(x, x_k)$, Ecuación (3), necesita ser adaptada. Una lista de las funciones base adaptadas puede ser encontrada en, por ejemplo, Koop (1993) y Liu et al. (2020a).

3.2 Estimación del Modelo

Basado en la Ecuación (4), un modelo de Gauss–Markov puede ser establecido para estimar los coeficientes desconocidos:

$$y_p + e_p = A_p d \quad \text{con} \quad \Sigma_{y_p} = \sigma_p^2 P_p^{-1}, \quad (5)$$

donde y_p es el vector de observaciones $N_p \times 1$ del conjunto de datos gravitacionales con $p = 1, 2, \dots, P$ y A_p es la matriz de diseño $N_p \times K$, la cual contiene las correspondientes (adaptadas) funciones de escala. $d = [d_1, d_2, \dots, d_K]^T$ es el vector $K \times 1$ de los coeficientes desconocidos. Σ_{y_p} es la matriz de covarianza $N_p \times N_p$ del vector de observaciones y_p , con σ_p^2 siendo el factor de varianza desconocido y P_p siendo su matriz de pesos definida positiva. Sin embargo, el sistema de ecuaciones normales asociado suele ser mal planteado (véase, por ejemplo, Liu (2023) para más detalles). Para resolver este problema, la regularización de Tikhonov es aplicada. El vector de expectativa μ_d del vector de coeficientes d es introducido como información a priori, y un modelo lineal adicional puede ser formulado como:

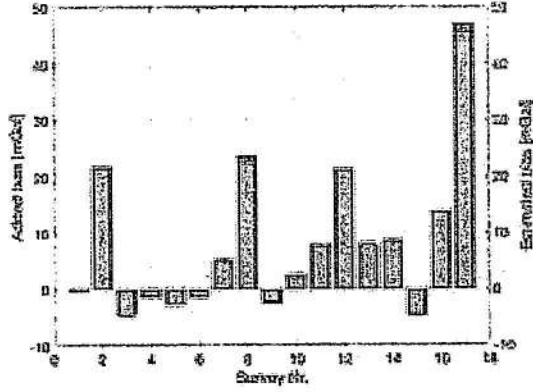


Figura 3. Comparación entre el sesgo añadido y el sesgo estimado para cada levantamiento aéreo en una prueba de simulación

$$\mu_d + e_d = d \quad \text{con} \quad \Sigma_{\mu_d} = \sigma_{\mu}^2 P_{\mu}^{-1}, \quad (6)$$

Σ_{μ_d} es la matriz de covarianza $K \times K$ de la información a priori, con σ_{μ}^2 siendo el correspondiente factor de varianza desconocido y P_{μ} siendo su matriz de pesos definida positiva. El vector de coeficientes d y su matriz de covarianza pueden luego ser estimados como:

$$\hat{d} = \left(\sum_{p=1}^P \left(\frac{1}{\sigma_p^2} A_p^T P_p A_p \right) + \frac{1}{\sigma_{\mu}^2} P_{\mu} \right)^{-1} \left(\sum_{p=1}^P \left(\frac{1}{\sigma_p^2} A_p^T P_p y_p \right) + \frac{1}{\sigma_{\mu}^2} P_{\mu} \mu_d \right) \quad (7a)$$

$$\hat{\Sigma}_d = \left(\sum_{p=1}^P \left(\frac{1}{\sigma_p^2} A_p^T P_p A_p \right) + \frac{1}{\sigma_{\mu}^2} P_{\mu} \right)^{-1} \quad (7b)$$

Los factores de varianza σ_p^2 y σ_{μ}^2 son determinados por la estimación de componentes de varianza (VCE, Koch y Kusche, 2002). Los elementos diagonales de la matriz de covarianza Σ_d , es decir, las varianzas, dan información sobre la incertidumbre de los coeficientes estimados.

3.3 Estimación de sesgos usando SRBF's

Como se mostró en la sección "Datos de gravedad aérea", existen sesgos variables en los levantamientos aéreos. No obstante, el primer levantamiento (Nr. 1) muestra una diferencia media muy pequeña, de apenas -0.14 mGal con referencia al modelo SATOP (véase Fig. 2b). Además, este levantamiento se realizó en un área plana, con una elevación máxima de 230 m . Como consecuencia, las mediciones aéreas, así como el modelo SATOP ambos coinciden bastante bien con diferentes GGMs de alta resolución en términos de valores medios de perturbación de gravedad. Por lo tanto, este levantamiento es asumido libre de sesgos y se establece como referencia para estimar los sesgos de las otras 16 campañas.

Correspondientemente, el modelo de estimación de

sesgo para cada levantamiento aéreo q se establece con

$$\begin{cases} y_1 + e_1 = A_1 d & \text{with } \Sigma_{y_1} = \sigma_1^2 P_1^{-1} \\ y_q + e_q = A_q d + 1_q \Delta_{q|1} \quad (q = 2, 3, \dots, Q) & \text{with } \Sigma_{y_q} = \sigma_q^2 P_q^{-1} \end{cases} \quad (8)$$

con $1_q = [1, 1, \dots, 1]^T$ siendo el $N_q \times 1$ vector de unos.

El término de sesgo $\Delta_{q|1}$ puede ser estimado junto con el vector de coeficientes d por el establecimiento de un modelo de Gauss-Markov correspondiente.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_Q \\ \mu_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_Q \\ e_{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_2 & 1_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & 1_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_Q & 0 & 0 & \dots & 1_Q & 0 \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \Delta_{2|1} \\ \Delta_{3|1} \\ \vdots \\ \Delta_{Q|1} \\ \mu_d \end{bmatrix}$$

donde

$$D \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_Q \\ \mu_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 P_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 P_2^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 P_3^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_Q^2 P_Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{\mu}^2 P_{\mu}^{-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Tomando $A_1^* = [A_1, 0, 0, \dots, 0]$, $A_2^* = [A_2, 1_2, 0, \dots, 0]$, ..., $A_Q^* = [A_Q, 0, 0, \dots, 1_Q]$ a ser la nueva matriz de diseño $N_q \times (K + Q - 1)$ para el q -ésimo levantamiento aéreo, y

$$A_{\mu} = [I, 0, 0, \dots, 0]$$

a ser la matriz de diseño $K \times (K + Q - 1)$ para la información a priori μ_d , la cual contiene una matriz identidad $K \times K$ e I y una matriz cero $K \times (Q - 1)$. El vector desconocido $(K + Q - 1) \times 1$,

$$c = [d^T, \Delta_{2|1}, \Delta_{3|1}, \dots, \Delta_{Q|1}]^T$$

puede ser estimado como:

$$\hat{c} = \left(\sum_{q=1}^Q \left(\frac{1}{\sigma_q^2} A_q^{*T} P_q A_q^* \right) + \frac{1}{\sigma_{\mu}^2} A_{\mu}^T P_{\mu} A_{\mu} \right)^{-1}$$

$$\left(\sum_{q=1}^Q \left(\frac{1}{\sigma_q^2} A_q^{*T} P_q A_q^* \right) + \frac{1}{\sigma_{\mu}^2} A_{\mu}^T P_{\mu} A_{\mu} \right) \quad (10a)$$

$$\hat{\Sigma}_c = \left(\sum_{q=1}^Q \left(\frac{1}{\sigma_q^2} A_q^{*T} P_q A_q^* \right) + \frac{1}{\sigma_{\mu}^2} A_{\mu}^T P_{\mu} A_{\mu} \right)^{-1} \quad (10b)$$

Nuevamente, los factores de varianza σ_q^2 y σ_{μ}^2 pueden ser determinados mediante la estimación de componentes de varianza (VCE).

4 Configuración de cómputo

4.1 Sesgo en los datos aéreos

El desempeño del modelo de estimación de sesgos usando SRBFs (Ec. 9) es primero revisado usando datos

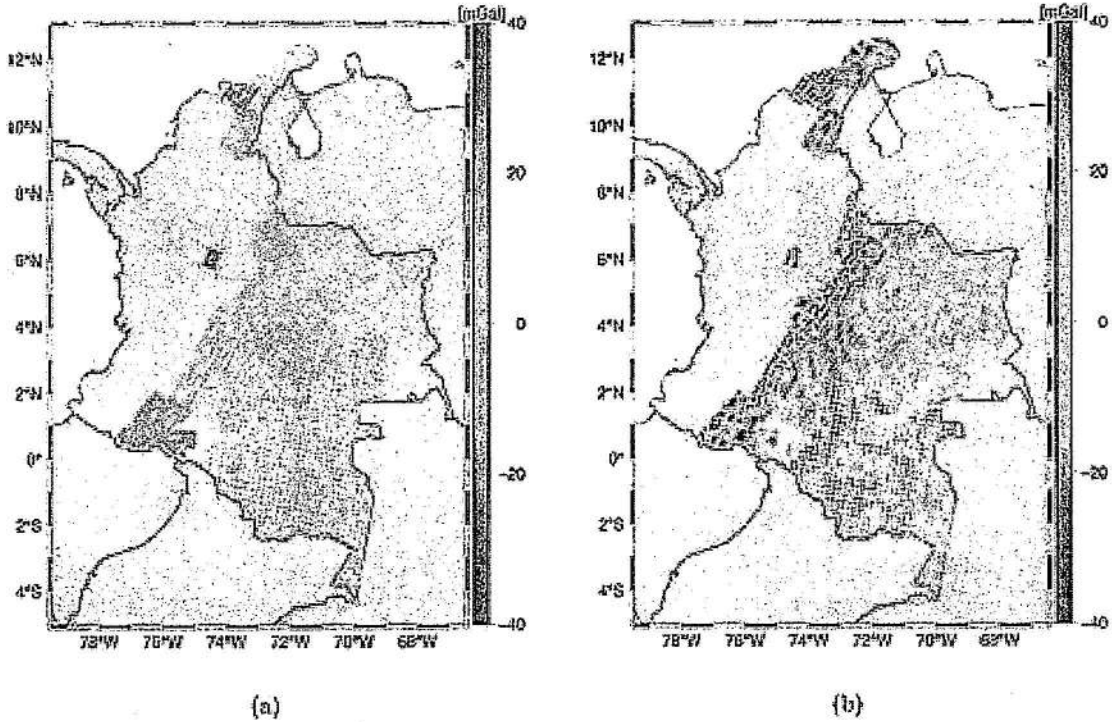


Figura 4. a El sesgo estimado para cada levantamiento aéreo, es decir, las diferencias antes y después de eliminar los sesgos estimados en cada campaña; b diferencias entre los datos de gravedad aérea después de eliminar el sesgo estimado en cada levantamiento y el modelo SATOP.

simulados. Para este propósito, las perturbaciones de gravedad aéreas son calculadas de XGM2019 (Zingerle et al. 2020) hasta grado/orden 5480 en las posiciones actuales de los 17 levantamientos aéreos en Colombia, y 1 mGal de ruido aleatorio es adicionado. Un sesgo artificial con el valor siendo la diferencia media entre las observaciones aéreas y el modelo SATOP (Fig. 2b) es adicionado para cada levantamiento aéreo. Luego, la Ecuación 9 es aplicada para estimar el sesgo. La Figura 3 muestra la diferencia entre el sesgo adicionado y el sesgo estimado para cada levantamiento. Es claro que los valores de sesgo estimado coinciden con los agregados muy bien.

El error RMS de las diferencias entre los sesgos estimados y adicionados es 0.51 mGal, el cual es relativamente pequeño considerando los sesgos muy grandes agregados con media de 8.39 mGal y una desviación estándar de 13.69 mGal. Estos resultados demuestran la validez del procedimiento de estimación de sesgos desarrollado usando SRBF. Después de evaluar el desempeño de la estimación del modelo, es aplicado a mediciones aéreas reales en Colombia para cuantificar el sesgo de cada levantamiento.

La Figura 4a: ilustra la estimación de sesgos estimados para cada levantamiento, los valores varían de -5.67 mGal a 35.27 mGal, con una de media 8.74 mGal y una desviación estándar STD de 11.50 mGal. Estos sesgos luego son eliminados de los datos aéreos antes de que sean combinados con los datos terrestres y de altimetría para el modelado del cuasi-geoide. La Figura 4b muestra la comparación entre los datos de gravedad aérea y el

modelo SATOP en términos de valores de perturbaciones de gravedad, después de eliminar los sesgos estimados. Las diferencias tienen un valor medio de 0.31 mGal y una desviación estándar de STD 14.65 mGal.

Comparado con la Fig. 2, las diferencias con respecto a SATOP son mucho menores, lo cual demuestra la importancia del procedimiento de estimación de sesgos. Sin embargo, vale la pena mencionar que las diferencias entre los datos de gravedad y SATOP también contienen el error de omisión de SATOP, el cual es limitado espectralmente a grado/orden 719, así como señales adicionales en los datos de gravedad que no pueden ser representadas por Earth2014, el cual asume que las masas topográficas tienen densidad constante y no representa la verdadera señal de gravedad exactamente (Hirt et al. 2010; Bucha et al. 2016). Por lo tanto, nuestro objetivo no es tener los datos aéreos tan cercanos a SATOP como sea posible, pero usar este para verificar los sesgos de onda larga en los datos aéreos.

4.2 Remove- Calcular-Restaurar

El procedimiento remove – calcular – restaurar (RCR)

$$\Delta\delta g = \delta g - \delta g_{\text{GGM}} - \delta g_{\text{topo}}, \quad (11)$$

es aplicado, donde δg son las observaciones de gravedad, δg_{GGM} es el componente de longitud de onda larga proveniente de un GGM, y δg_{topo} representa los efectos topográficos de alta frecuencia obtenidos de un modelo

topográfico. $\Delta\delta g$ es la parte remanente después del paso de eliminación, la cual sirve como entrada para el modelo de estimación, Ecuación (5). Note que, en el caso de los datos de altimetría (DTU21GRA), el observable de gravedad se da en términos de anomalía de gravedad Δg en lugar de la perturbación de gravedad δg . En este estudio, el componente de longitud de onda larga δg_{GGM} es calculado a partir de XGM2019 (Zingerle et al. 2020) hasta grado y orden 719 para los tres tipos de observaciones de gravedad, es decir, los datos terrestres, aéreos y de altimetría.

Con respecto a δg_{topo} , el modelo topográfico dV_ELL_Earth2014 (Rexer et al. 2016) desde el grado y orden 720 hasta 2159, y un modelo de terreno residual ERTM2160 (Hirt et al. 2014) desde el grado 2160 hasta alrededor de 80,000, el cual corresponde a una resolución espacial de 250m, son usados para los datos terrestres; el modelo dV_ELL_Earth2014 desde el grado 720 hasta 5480 es usado para los datos aerotransportados y de altimetría. Dos modelos topográficos diferentes son usados por encima del grado 2160 porque son calculados usando los mismos datos originales y contienen la misma señal (Hirt et al. 2014; Rexer et al. 2016), pero el ERTM2160 solo está disponible como una grilla sobre la superficie terrestre en áreas continentales; ver Liu et al. (2020b) para más detalles.

La Figura 5 visualiza el paso de eliminación, es decir, δg (primera fila), $\delta g - \delta g_{\text{GGM}}$ (segunda fila) y $\delta g - \delta g_{\text{GGM}} - \delta g_{\text{topo}}$ (tercera fila), para los tres tipos de datos de gravedad, respectivamente. Las estadísticas correspondientes son listadas en la Tabla 1. Las observaciones de gravedad muestran grandes variaciones en esta área de estudio, las cuales son causadas por la topografía diversa de Colombia. Eliminando el GGM suaviza las observaciones de gravedad en un 67%, 81% y 79% en términos de desviación estándar (STD) para los datos terrestres, aéreos y de altimetría, respectivamente. Después de eliminar la contribución del GGM, el campo de gravedad (segunda fila en la Fig. 5) está claramente dominado por los efectos topográficos, es decir, una correlación con el mapa del terreno (Fig. 1a) puede ser vista. Tras eliminar los efectos topográficos, las observaciones de gravedad se suavizan aún más, especialmente en las zonas montañosas.

Table 1: Las estadísticas de las observaciones, la parte remanente después de remover el GGM, y después de remover ambos, el GGM y el modelo topográfico, para cada tipo de dato (unidad [mGal])

		Min	Max	Mean	STD
Terrestres	δg	-295.02	370.49	-1.25	71.38
	$\delta g - \delta g_{\text{GGM}}$	-222.36	141.28	-3.91	23.82
	$\delta g - \delta g_{\text{GGM}} - \delta g_{\text{topo}}$	-205.77	128.24	0.70	13.27
Aéreo	δg	-105.81	523.90	32.43	66.58
	$\delta g - \delta g_{\text{GGM}}$	-58.79	84.45	-0.08	12.98
	$\delta g - \delta g_{\text{GGM}} - \delta g_{\text{topo}}$	-34.25	34.35	-0.01	9.96
Altimetría	Δg	-208.52	257.34	-15.12	53.04
	$\Delta g - \Delta g_{\text{GGM}}$	-77.66	78.96	-0.14	11.23
	$\Delta g - \Delta g_{\text{GGM}} - \Delta g_{\text{topo}}$	-47.83	51.60	0.01	7.24

Un hallazgo interesante es que los efectos topográficos también son fuertes en la región costera del área marina,

debido a su accidentada batimetría donde la profundidad cambia de 0 a -5000m en una corta distancia. El efecto de suavizado por el modelo topográfico es el más grande con 44% para los datos terrestres, y el más pequeño para los datos aéreos con 23%, lo cual es razonable ya que las observaciones terrestres se dan sobre la superficie de la Tierra, pero los datos aéreos se observan a la altura de vuelo y por lo tanto, son menos sensibles a la señal de gravedad de alta frecuencia.

4.3 Configuración del modelo.

Hay cuatro factores de las SRBF que influyen en el resultado de la modelación, y por lo tanto, necesitan ser especificados, a saber (1) el ancho de banda, es decir, el grado máximo de expansión; (2) las ubicaciones de las SRBF; (3) el tipo de SRBF; y (4) las extensiones de la zona de datos para reducir los efectos de borde. Estos cuatro factores son elegidos siguiendo a Liu et al. (2020b).

Más específicamente, el grado máximo de expansión n_{max} depende de la resolución espacial promedio de todas las observaciones disponibles, y para esta área de estudio $n_{\text{max}} = 2190$ se elige. La grilla de Reuter (Reuter, 1982) es usada, la cual genera una cobertura homogénea de puntos de grilla sobre la esfera. La función de Shannon no suavizada es utilizada en la etapa de análisis para estimar los coeficientes desconocidos para evitar la pérdida de información espectral. La función Polinómica Cúbica (CuP), la cual tiene características de suavizado, es aplicada en la etapa de síntesis para calcular los funcionales de gravedad de salida y reducir los efectos sistemáticos erróneos (Lieb et al. 2016).

Para minimizar los efectos de borde, el área de cómputo $\partial\Omega_C$, donde las SRBF son ubicadas, debe ser más grande que el área de observación $\partial\Omega_O$, donde las observaciones son dadas (ver Fig. 1b). Y $\partial\Omega_O$ debe ser más grande que el área de investigación $\partial\Omega_I$, donde el modelo final de cuasigeoide es calculado, es decir, $\partial\Omega_I \subset \partial\Omega_O \subset \partial\Omega_C$. El tamaño del margen η entre las tres áreas está determinado por el grado máximo de expansión y el valor máximo de latitud del área de investigación (Liu et al. 2020b), y es seleccionado como $\eta = 0.2^\circ$.

Los datos terrestres, aéreos y de altimetría son combinados usando el modelo de Gauss-Markov, es decir, la Ecuación (5), y los coeficientes desconocidos son luego estimados por la Ecuación (7), con los pesos relativos determinados por VCE. El vector de expectativa μ_d se establece como el vector cero dado que el modelo de referencia, es decir, los modelos δg_{GGM} y δg_{topo} eliminados dentro del procedimiento RCR sirven como información a priori.

La matriz de pesos P_d de la información a priori se establece como la matriz identidad, es decir, $P_d = I$, asumiendo que los coeficientes desconocidos no están correlacionados y tienen la misma precisión (Lieb et al. 2016). Usualmente, en las publicaciones sobre modelación

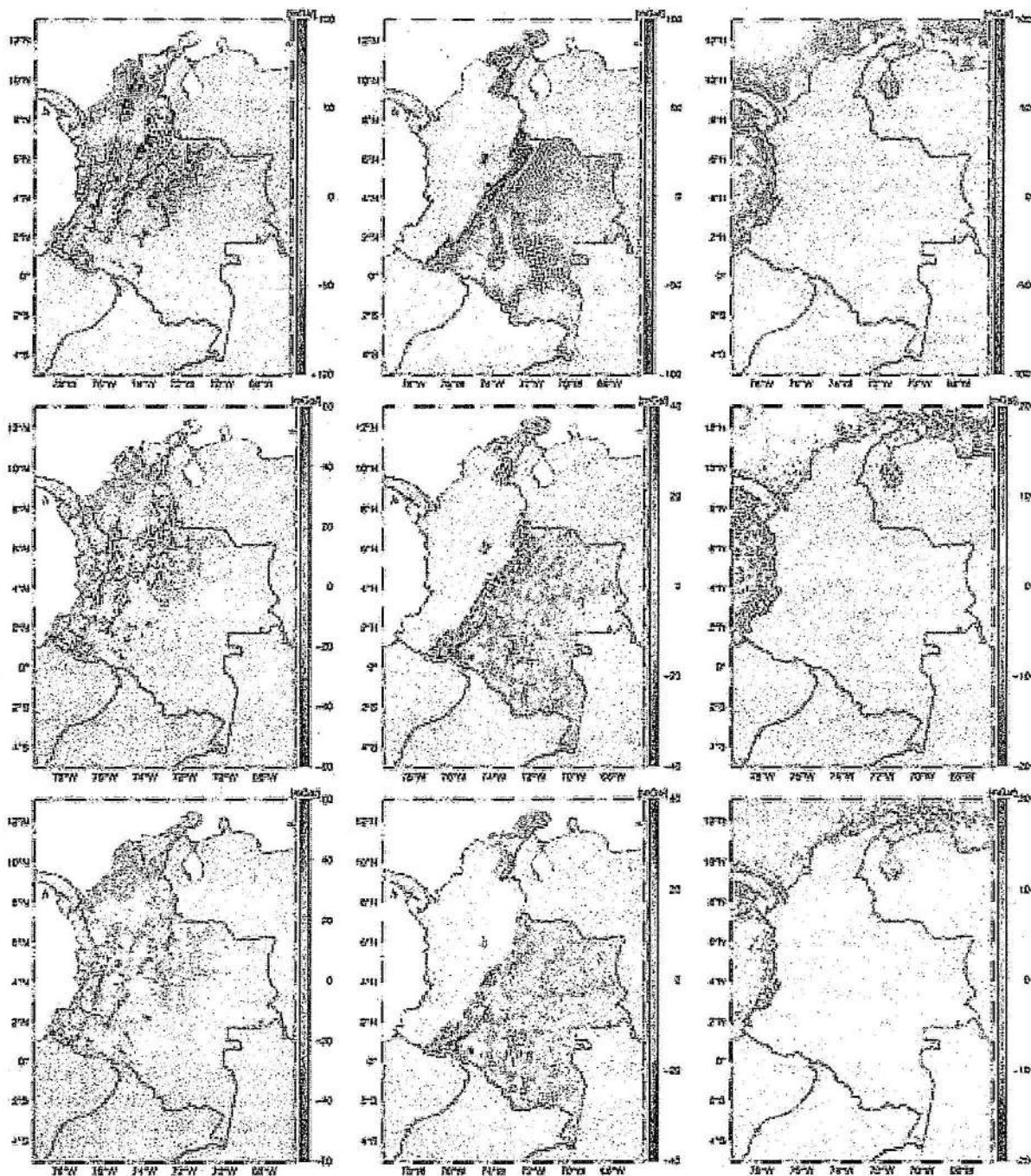


Figura 5. Las observaciones δg (primera fila), la parte restante después de eliminar el modelo GGM $\delta g - \delta g_{GGM}$ (segunda fila), y después de eliminar tanto el modelo GGM como el modelo topográfico $\delta g - \delta g_{GGM} - \delta g_{topo}$ (tercera fila), para los datos terrestres (primera columna), aerotransportados (segunda columna) y de altimetría (columna derecha). Nótese que para las dos últimas filas se utilizan barras de color diferentes..

regional del campo de gravedad (por ejemplo, Wu et al. 2017; Slobbe et al. 2019), la matriz de pesos P_p de diferentes tipos de observaciones también se establece comúnmente como la matriz identidad, es decir, $P_p = I$, asumiendo que el mismo tipo de mediciones tiene la misma precisión y no está correlacionado. La razón es que la precisión exacta de los datos o calidad de las mediciones de gravedad reales es usualmente desconocida y, en

consecuencia, resulta difícil establecer una matriz realista de varianza-covarianza de errores completa. En este estudio, las matrices de pesos para los datos terrestres y de altimetría se establecen ambas como la matriz identidad.

Para las mediciones aéreas, tanto los resultados del análisis de cruces como la comparación con el modelo SATOP sugieren que los diferentes levantamientos

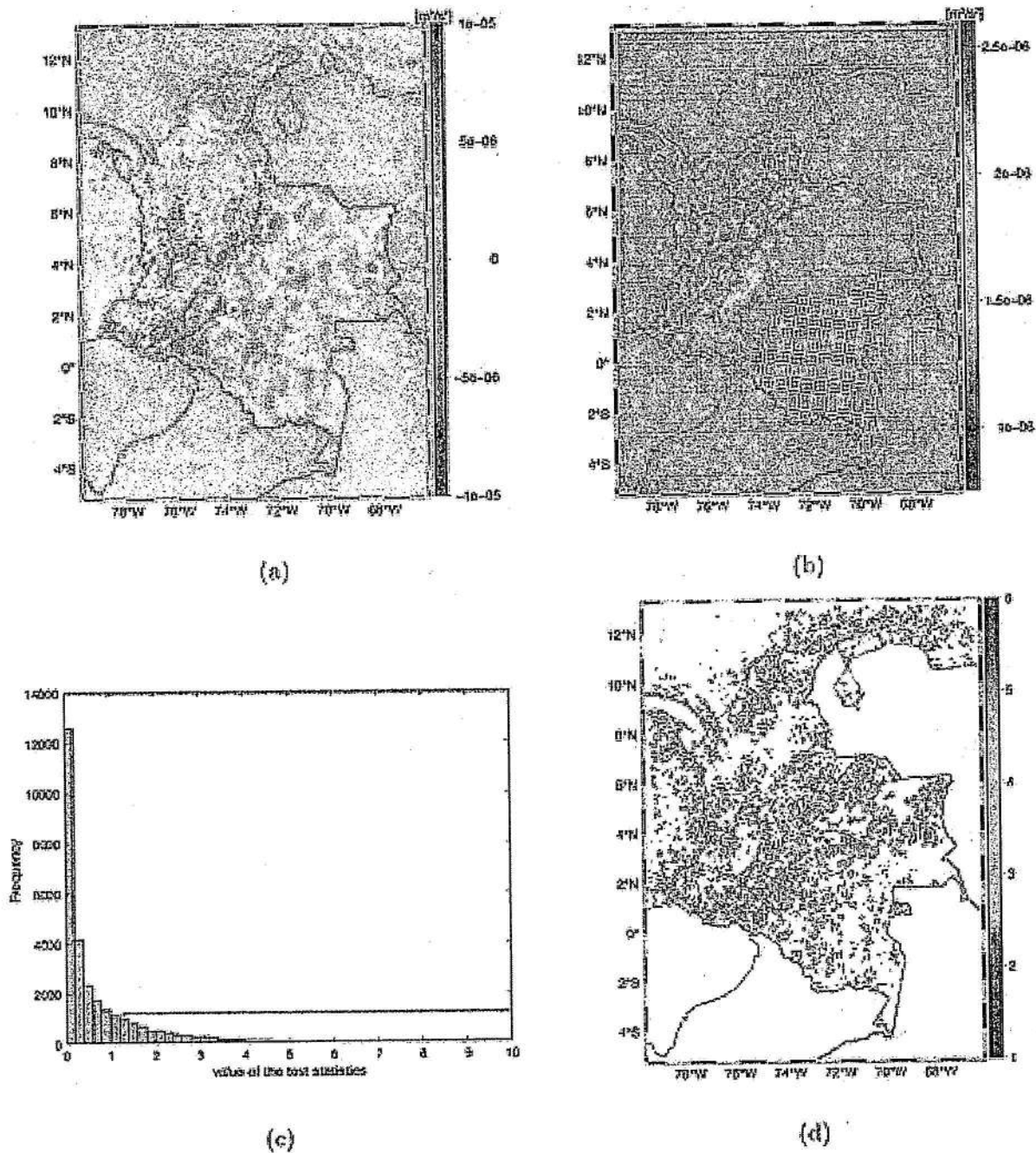


Figura 6. a los coeficientes estimados, b sus desviaciones estándar, c el histograma de la estadística de prueba $|d|/\sigma_d$, y d el valor de la estadística de prueba correspondiente de los coeficientes significativos.

presentan precisiones significativamente distintas y, por lo tanto, no es óptimo usar la matriz identidad como matriz de pesos. En este caso, se toma ventaja de la estimación de sesgo conducido (ver Sección “Estimación de sesgo utilizando SRBF”) para definir la matriz de pesos.

Es decir, en el modelo de estimación de sesgos aéreos Ecuación (10), los factores de varianza σ_q^2 ($q = 1, 2, \dots, Q$) son estimados para los levantamientos aéreos usando VCE, los cuales indican los pesos relativos de los $Q = 17$ levantamientos aéreos. Estos factores de varianza son

luego usados para establecer la matriz de pesos de las observaciones aéreas, esto es:

$$P_{\text{aereo}} = \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} I_1, \frac{1}{\sigma_2^2} I_2, \dots, \frac{1}{\sigma_Q^2} I_Q \right).$$

Siguiendo los estándares y convenciones para la realización del IHRS recomendados por Sánchez et al. (2021) a lo largo del cálculo. El cálculo es conducido en el sistema de marea cero, con el GRS80 siendo el elipsoide de referencia. La anomalía de altura ζ es determinada en

la superficie de la Tierra, y el término de corrección de grado cero.

Se siguen los estándares y convenciones para la realización del IHRS recomendados por Sánchez et al. (2021) a lo largo del cálculo. El cálculo es conducido en el sistema de marea cero, con el GRS80 siendo el elipsoide de referencia. La anomalía de altura ζ es determinada en la superficie de la Tierra, y el término de corrección de grado cero

$$\zeta_0 = \frac{(GM_{GGM} - GM_{GRS80})}{r_P \cdot \gamma_Q} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma_Q} \quad (12)$$

(Heiskanen and Moritz 1967) es añadido, donde $GM_{GGM} = 3.986004415 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ y $GM_{GRS80} = 3.986005 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ son los valores constantes GM del GGM y del elipsoide de referencia GRS80, respectivamente. $W_0 = 62636853.4 \text{ m}^2/\text{s}^2$ es el valor de potencial convencional adoptado para el IHRS (IAG Resolution 1, Drewes et al. (2016)), y $U_0 = 62636860.850 \text{ m}^2/\text{s}^2$ es el valor de potencial en el elipsoide de referencia, es decir, GRS80. r_P es la distancia radial geocéntrica de los puntos P en la superficie de la Tierra, donde el cuasigeoide es calculado, y γ_Q es la gravedad normal en el punto correspondiente mapeada sobre el teluroide.

5 Resultados, validación y discusión.

5.1 Coeficientes estimados.

Los coeficientes estimados $\hat{d}$ y sus desviaciones estándar $\hat{\sigma}_d$ de las Ecuaciones. (7a) y (7b) son representadas en la Fig. 6. Los coeficientes reflejan la energía del campo de gravedad recuperado en sus ubicaciones debido a las características de localización espacial de las SRBF (Lieb, 2017). Por lo tanto, los coeficientes estimados con valores absolutos grandes, es decir, esos que no están cercanos a cero, indican que las señales de gravedad adicionales son capturadas con respecto al modelo de referencia.

En la Fig. 6a, los más grandes valores absolutos son observados en las áreas donde los datos de gravedad son localizados, es decir, una clara correlación entre los coeficientes estimados y la distribución de los datos (Fig. 1b) puede ser vista, lo cual demuestra que las señales de gravedad adicionales han sido obtenidas de las mediciones de gravedad. Además, los valores absolutos más grandes están principalmente ubicados en áreas con gran elevación (ver Fig. 1a),

lo cual muestra la notable contribución de las observaciones terrestres y aéreas en terrenos accidentados, aunque los modelos topográficos ya se han introducido en el modelo de referencia. En la región marina, valores absolutos grandes en los coeficientes estimados son vistos en las zonas costeras, representando la información gravitatoria adicional intróducida por DTU21GRA en comparación con la versión anterior DTU13GRA, la cual se utilizó para desarrollar XGM2019. Esto coincide con la conclusión de Wu et al. (2022), quienes afirman que la inclusión de los datos altimétricos Sentinel-3A/B SAR en

DTU21GRA mejora la exactitud del cuasigeoide marino comparada con versiones anteriores especialmente sobre regiones costeras.

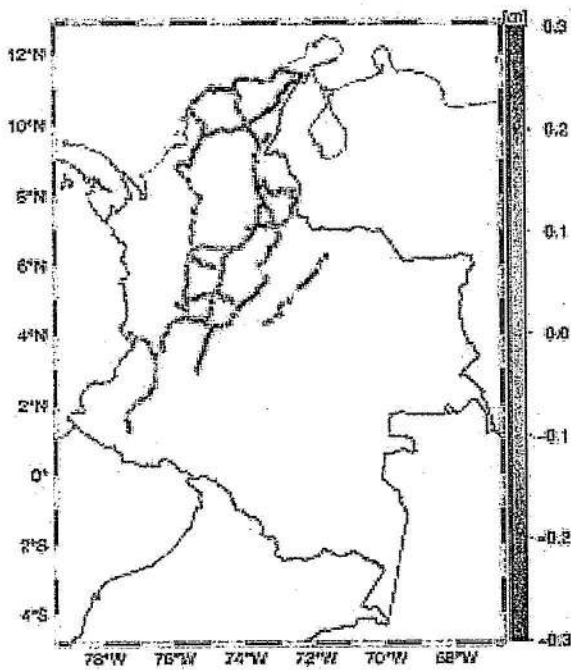
Las desviaciones estándar estimadas (Fig. 6b) son alrededor de 1 orden de magnitud más pequeña que los coeficientes estimados, lo que indica una combinación bien balanceada de los conjuntos de datos (Lieb et al. 2016). Estas son más grandes en las áreas sin observaciones de gravedad, lo cual también es razonable. La mayoría de los coeficientes en la Fig. 6a, es decir, principalmente sobre las áreas marinas y los países circundantes, están cercanos a cero, lo que significa que no contienen información de gravedad adicional con respecto al modelo de referencia. Una prueba de hipótesis t (t -test) es luego conducida para verificar si un coeficiente es significativo, es decir, significativamente diferente de cero, utilizando el estadístico de prueba $|\hat{d}|/\hat{\sigma}_d$ (Bentel, 2013). Un coeficiente individual $\hat{d}$ es considerado significativo si su estadístico de prueba correspondiente $|\hat{d}|/\hat{\sigma}_d$ es más grande que un valor crítico $t_{nu,p}$; ver Koch (1999) y Liu et al. (2020b) para más detalles

La Figura 6c muestra el histograma de los estadísticos de prueba, con los rectángulos rojos marcando esos valores más grandes que $t_{nu,p}$, y la Figura 6d visualiza los coeficientes correspondientes los cuales son significativos. Como podemos ver, solo alrededor del 21% de los coeficientes son considerados como significativamente diferentes de cero de acuerdo con la prueba t . Los coeficientes no significativos no tienen influencia en el resultado del modelamiento y pueden ser removidos. Este procedimiento salvaría considerablemente el esfuerzo computacional, y es especialmente beneficioso cuando se calculan modelos de grilla de alta resolución, ya que el tamaño de la gran matriz de diseño se reduciría significativamente.

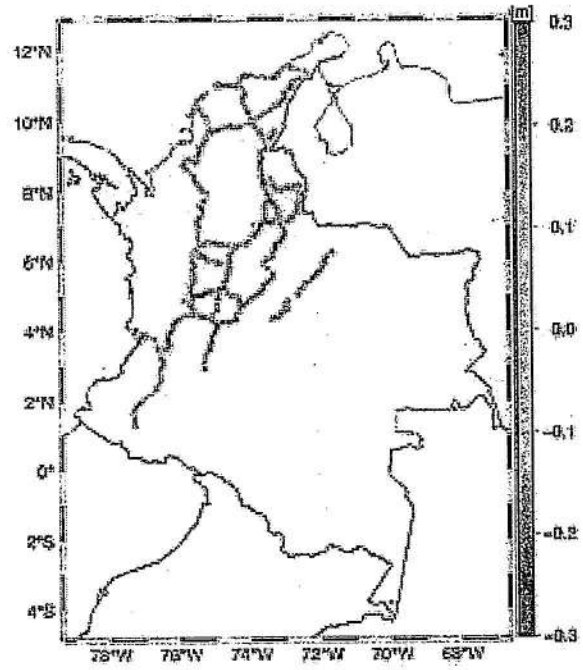
5.2 Validación con datos de GPS/nivelación

El modelo de cuasigeoide calculado, denominado QGeoidCOL2023, es validado usando 3025 puntos de datos GPS/nivelación (Fig. 1b), en ambos sentidos absoluto y relativo. En la evaluación absoluta, los valores de anomalía de altura calculados son comparados directamente con los datos de GPS/nivelación punto por punto.

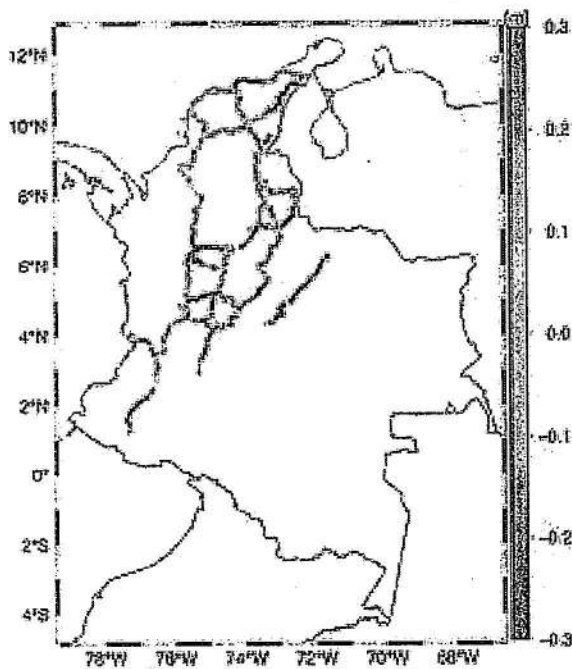
En un caso ideal, la relación entre las alturas de cuasigeoide, elipsoidal y normal debería cumplir $\zeta = h - H^*$. Sin embargo, en realidad, esta igualdad no se cumple debido a diversas razones (Fotopoulos et al., 1999), que incluyen (1) inconsistencias de datum, es decir, la desviación entre el cuasigeoide gravimétrico y la superficie de referencia del datum de nivelación; (2) ruido aleatorio, errores o distorsiones sistemáticas en las alturas elipsoidales y físicas, (3) efectos geodinámicos, como la deformación superficial debida a terremotos, especialmente cuando los datos GPS/nivelación se recopilan durante un período de tiempo prolongado. Tales efectos sistemáticos pueden ser vistos en la Figura 7a, es decir, las diferencias entre la anomalía de altura gravimétrica calculada $\zeta_{\text{gravimétrica}}$ y la anomalía de altura derivada de los datos GPS/nivelación $\zeta_{\text{GPS/nivelación}}$



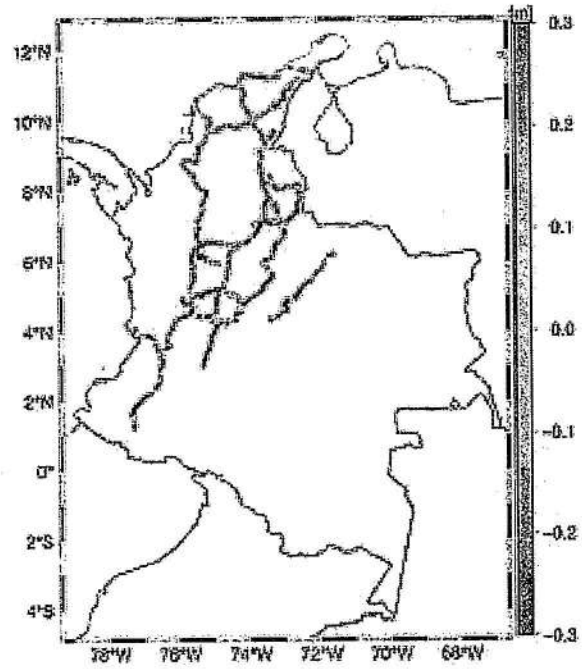
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7. Diferencias entre QGeoidCOL2023 y los datos de GPS/nivelación a antes y b después de aplicar el modelo de corrección de 7 parámetros, y las diferencias entre QGEOID2021 y los datos de GPS/nivelación c antes y d después de aplicar el modelo de corrección de 7 parámetros. Tenga en cuenta que para los gráficos antes de aplicar la superficie de corrección se han eliminado los valores medios.

muestran una tendencia sistemática de norte (valores negativos) a sur (valores positivos).

Para modelar estas desviaciones, una superficie de

corrección podría ser aplicada a la anomalía de altura

Table 2: Comparación entre el modelo cuasigeoidal gravimétrico regional y los datos GPS/nivelación (unidad [cm]).

Tipo de corrección	QGeoidCOL2023				QGEOID2021			
	Mín	Máx	Media	Desv. Est.	Mín	Máx	Media	Desv. Est.
Antes de la corrección	-46.14	87.74	19.21	21.27	-57.92	84.37	13.89	27.22
Corrección planar	-76.65	58.70	0.00	16.54	-80.84	73.50	0.00	26.63
Corrección polinómica	-72.44	60.94	0.00	16.08	-83.48	72.90	0.00	24.57
Corrección de 4 parámetros	-76.33	58.40	0.00	16.55	-81.78	70.55	0.00	24.98
Corrección de 5 parámetros	-73.25	58.09	0.00	16.35	-82.12	71.24	0.00	24.93
Corrección de 7 parámetros	-76.06	65.21	0.00	15.76	-85.37	72.93	0.00	24.50

basada en GPS/nivelación, es decir,

$$\zeta_i^{\text{GPS/nivelación}} - \zeta_i^{\text{gravimétrica}} = a_i^T t + v_i$$

(Heiskanen y Moritz, 1967), donde t es el vector de n parámetros desconocidos, $a_i^T t$ se espera que describa los efectos sistemáticos y las inconsistencias del datum, y v_i es el término de error, el cual se utiliza como una medida de la precisión de la anomalía de altura. a_i es un vector $n \times 1$ que depende del tipo de superficie de corrección aplicada, y los comúnmente usados incluyen la superficie de corrección planar, el modelo de corrección polinómico (de segundo orden), los modelos de corrección de 4 parámetros, 5 parámetros, y de 7 parámetros, respectivamente.

Correspondientemente, el vector a_i^T puede ser definido como:

$$a_i^T = [1, \varphi_i, \lambda_i]; \quad (4a)$$

$$a_i^T = [1, \varphi_i, \lambda_i, \varphi_i^2, \lambda_i^2, \varphi_i \lambda_i]; \quad (4b)$$

$$a_i^T = [1, \cos \varphi_i \cos \lambda_i, \cos \varphi_i \sin \lambda_i, \sin \varphi_i]; \quad (4c)$$

$$a_i^T = [1, \cos \varphi_i \cos \lambda_i, \cos \varphi_i \sin \lambda_i, \sin \varphi_i, \sin^2 \varphi_i]; \quad (4d)$$

$$a_i^T = [\cos \varphi_i \cos \lambda_i, \cos \varphi_i \sin \lambda_i, \sin \varphi_i, \frac{\sin \varphi_i \cos \varphi_i \sin \lambda_i}{W_i}, \frac{\sin \varphi_i \cos \varphi_i \cos \lambda_i}{W_i}, \frac{1-f^2 \sin^2 \varphi_i}{W_i}, \frac{\sin^2 \varphi_i}{W_i}]; \quad (4e)$$

respectivamente (Fotopoulos et al. 1999; Kotsakis y Sideris 1999; Soykan y Soykan 2003), donde φ_i y λ_i son la latitud y longitud del i -ésimo punto GPS/nivelación, $W_i = \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_i)}$, con e^2 siendo la excentricidad, y f el achatamiento del elipsoide de referencia, es decir, el GRS80. El vector de parámetros t , así como v_i puede luego ser estimado mediante un ajuste por mínimos cuadrados. La estimación de una superficie de corrección no cambia el modelo cuasigeoidal gravimétrico calculado. Este es usado en este estudio para identificar posibles patrones en las discrepancias entre la anomalía de altura gravimétrica $\zeta_i^{\text{Gravimétrica}}$ y la anomalía de altura derivada de GPS/nivelación $\zeta_i^{\text{GPS/nivelación}}$. La identificación de dichos patrones puede proveer una evaluación de precisión más significativa y confiable para el modelo cuasigeoidal gravimétrico. La elección del modelo de superficie de corrección depende de cada área de estudio, por ejemplo, las discrepancias observadas y de la complejidad geológica. Un modelo con pocos

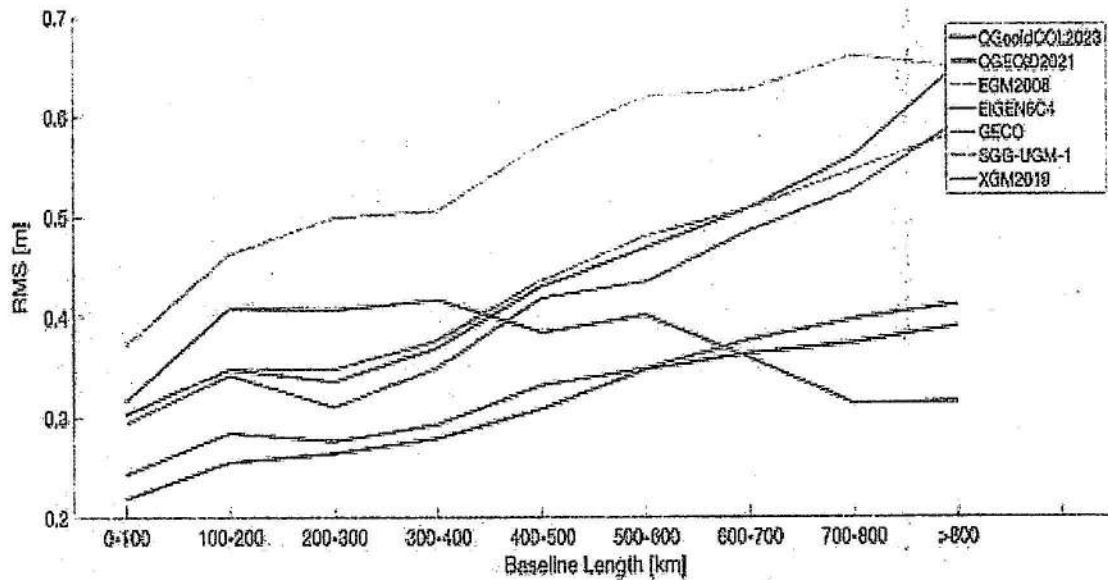
parámetros es simple, pero podría no ser suficiente para ajustar los efectos sistemáticos, especialmente en zonas montañosas. La comparación entre el modelo cuasigeoidal calculado QGeoidCOL2023 y los datos GPS/nivelación antes y después de aplicar distintos tipos de superficies de corrección se muestra en la Tabla 2. El valor de la STD (desviación estándar) de las diferencias disminuye tras aplicar la superficie de corrección, y el modelo de 7 parámetros ofrece el mejor resultado, es decir, el menor valor de STD. Esto es razonable, porque la variada topografía de Colombia requiere una superficie de corrección más detallada. La Figura 7b presenta las diferencias entre la anomalía de altura calculada y los datos GPS/nivelación tras aplicar el modelo de 7 parámetros. Las desviaciones sistemáticas en la Figura 7a ya no son visibles en la Figura 7b, y el valor STD disminuye de 21.27 cm a 15.76 cm. Vale la pena mencionar que las diferencias entre QGeoidCOL2023 y los datos de GPS/nivelación contienen no solo el error de cálculo de la altura cuasigeoidal gravimétrica sino también errores en las alturas elipsoidales y de nivelación. Además, los datos de GPS/nivelación están principalmente distribuidos en la zona montañosa sobre la parte del occidente de Colombia, donde no hay datos gravimétricos aéreos disponibles y existen grandes vacíos en los datos terrestres.

Por lo tanto, considerando la distribución limitada del conjunto de datos de GPS/nivelación, una desviación estándar (STD) de 15.76 cm no implica una baja precisión del modelo cuasigeoidal calculado.

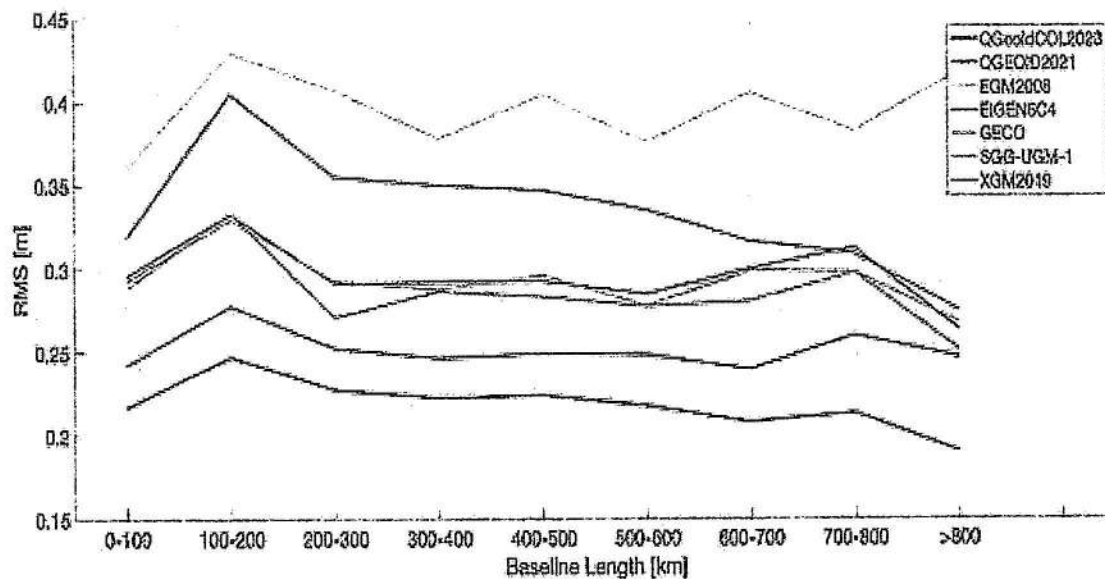
Table 3: Comparación entre diferentes GGM de alta resolución y los datos de GPS/nivelación después de aplicar el modelo de corrección de 7 parámetros (unidad [cm])

Modelo	Min	Max	Media	STD
EGM2008	-80.73	83.85	0.00	28.09
EIGEN6C4	-93.29	66.80	0.00	21.10
GECO	-110.82	60.37	0.00	20.39
SGG-UGM-1	-71.03	68.28	0.00	20.93
XGM2019	-75.93	80.06	0.00	17.86

Como referencia, el modelo cuasigeoidal sudamericano QGEoid2021 también es validado usando los mismos datos de GPS/nivelación, y sus diferencias son mostradas en la Fig. 7c. Menos efectos sistemáticos son observados en comparación con la Fig. 7a, lo cual refleja una



(a)



(b)

Figura 8. Validación relativa en términos de error RMS entre los modelos cuasi-geoides gravimétricos, es decir, QGeoidCOL2023, QGEOID2021 y diferentes GGM, y los datos de GPS/nivelación en función de la longitud de línea base a antes y b después de aplicar el modelo de corrección de 7 parámetros

menor inconsistencia de datum entre QGEOID2021 y los datos de GPS/nivelación. Esto se explica porque tanto QGEOID2021 y los datos de GPS/nivelación ambos se refieren al sistema local de referencia de alturas pero QGeoidCOL2023 se refiere al IHR.S. No obstante, QGEOID2021 entrega una desviación estándar (STD) de 27.22 cm (Tabla 2), la cual es 28% más grande que la obtenida con QGeoidCOL2023. Al aplicar una superficie

de corrección a los datos de GPS/nivelación, los valores de STD entregados por QGEOID2021 también disminuyen (ver Tabla 2), y nuevamente, el menor valor de STD se logra cuando el modelo de 7 parámetros es aplicado: Las diferencias correspondientes entre QGEOID2021 y los datos de GPS/nivelación después de aplicar el modelo de corrección de 7 parámetros se muestran en la Fig. 7d, dando una STD de 24.51 cm, la cual es 55% más grande

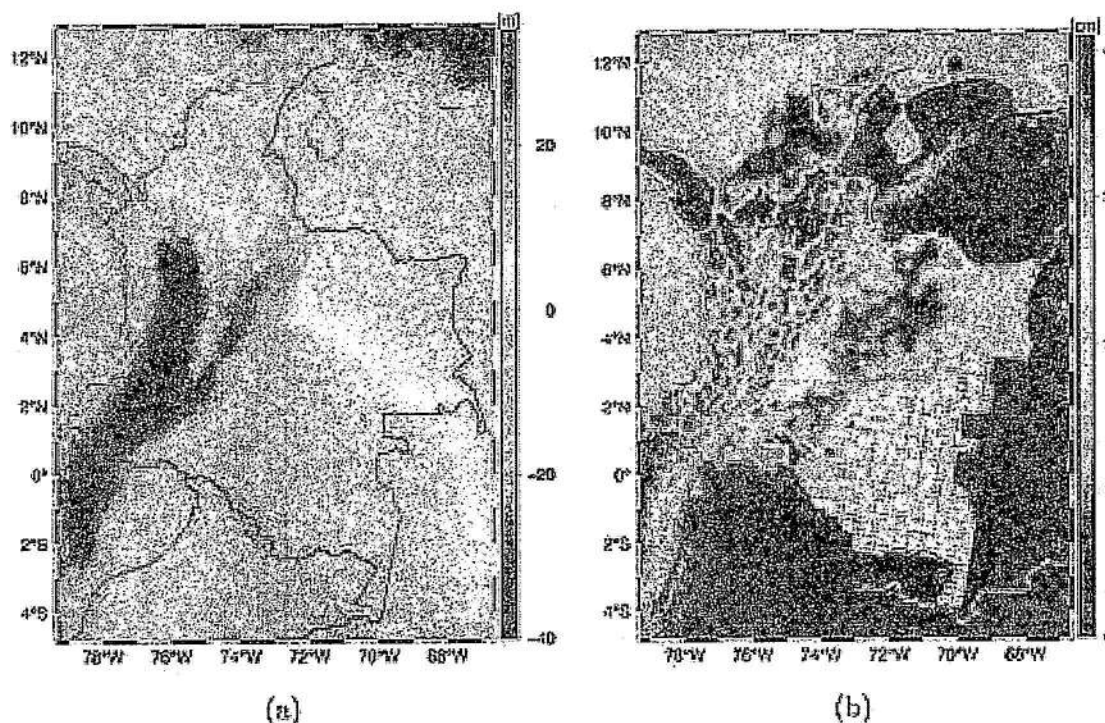


Figura 9. a Modelo cuasigeoidal QGeoidCOL2023; y b su mapa de desviación estándar.

que la obtenida con QGeoidCOL2023 (Fig. 7b). El modelo de 7 parámetros representa de la mejor manera las discrepancias sistemáticas entre el modelo gravimétrico y los datos de GPS/nivelación. Estas discrepancias son esperadas y siendo relacionadas con la topografía compleja en la región y con el hecho de que los datos de gravedad terrestre y de nivelación son obtenidos a lo largo de las carreteras, las cuales generalmente pasan a lo largo de las pendientes de las montañas. Además del refinamiento regional del campo de gravedad, otro enfoque para la determinación de las coordenadas del IHRF es usar modelos globales de gravedad GGM de alta resolución (Sánchez et al. 2021). Para evaluar la validez de este enfoque, el desempeño de diferentes GGMs de alta resolución, a saber: EGM2008 (Pavlis et al. 2012), EIGEN6C4 (Förste et al. 2014), GECO (Gilardoni et al. 2016), SGG-UGM-1 (Liang et al. 2018) y XGM2019 (Zingerle et al. 2020), es evaluado usando los datos de GPS/nivelación. Cada GGM es truncado en el grado 2159, y el modelo topográfico ERTM2160 es adicionado para tener en cuenta las partes de muy alta frecuencia desde el grado 2160 hasta aproximadamente 80,000. Muchas publicaciones recientes han sido dedicadas a la evaluación y comparación de distintos GGM en regiones o países específicos, por ejemplo, Yilmaz et al. (2017) para Turquía, Foroughi et al. (2017) para Irán, Pham et al. (2023) para Vietnam, entre muchos otros. Hasta donde se sabe, tal evaluación no se había realizado para Colombia, y, por tanto, es de alto interés. La Tabla 3 muestra la comparación entre diferentes GGM y los datos de GPS/nivelación; nótese que el modelo de corrección de 7 parámetros ha sido aplicado para tener en cuenta las inconsistencias sistemáticas. EGM2008 entrega el valor

de desviación estándar (STD) más grande de 28.09 cm. EIGEN6C4, GECO y SGG-UGM-1, todos desarrollados con base en EGM2008, muestran un rendimiento similar y mejoras significativas (alrededor del 25%) comparado con EGM2008. Esto puede ser explicado por la inclusión de los datos GOCE en estos tres modelos y revela la contribución de los datos de GOCE al modelo de gravedad. XGM2019 es el GGM con mejor desempeño para Colombia, lo cual podría ser debido al uso de un conjunto de datos mejorado de anomalías de gravedad terrestre proporcionado por la Agencia Nacional de Inteligencia Geoespacial (National Geospatial-Intelligence Agency, NGA, por sus siglas en inglés). Según lo indicado por Pail et al. (2018), este conjunto de datos mejorado resulta en actualizaciones significativas especialmente en áreas continentales como Sudamérica, África, partes de Asia y la Antártida.

Tabla 3: Estadísticas de las diferencias entre el modelo cuasigeoidal QGeoidCOL2023 y cinco GGMs de alta resolución, así como QGEOID2021 (unidad [cm]).

Modelo	Min	Max	Media	STD
XGM2019	-70.76	46.48	0.04	5.24
GECO	-275.53	150.49	-0.03	16.15
SGG-UGM-1	-298.41	164.64	-0.01	20.11
EIGEN6C4	-273.38	145.25	0.00	18.41
EGM2008	-356.00	210.66	0.65	35.32
QGEOID2021	-130.94	154.57	-8.80	30.28

No obstante, el modelo regional de cuasigeoide QGeoidCOL2023 supera a todos los modelos globales de gravedad GGMs de alta resolución evaluados, proporcionando mejoras desde un 12% (en comparación con XGM2019) hasta un 44% (en comparación con

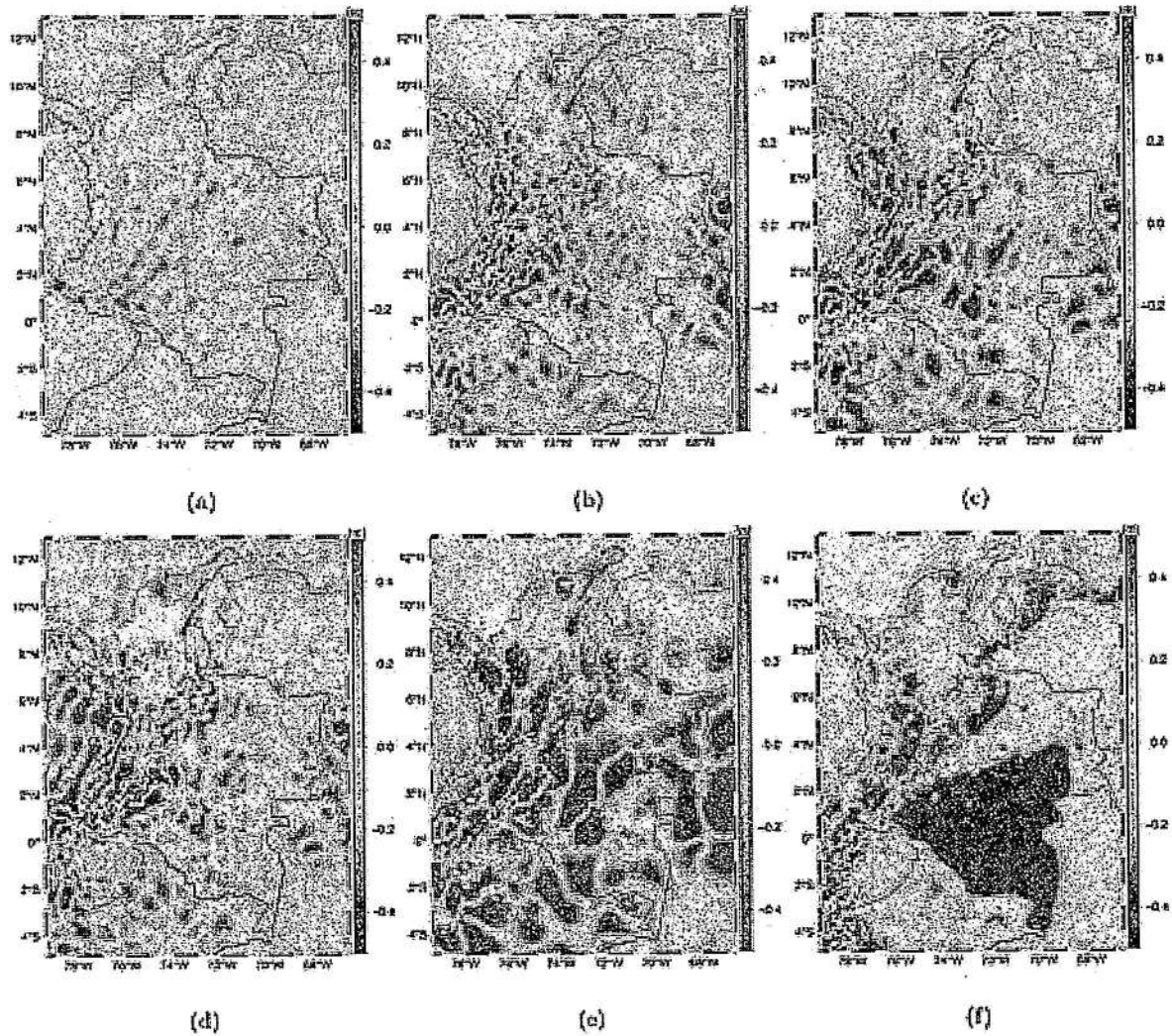


Figura 10. Diferencias del cuasigeoide entre QgeoidCOL2023 y a XGM2019, b GECO, c SGG-UGM-1, d EIGEN6C4, e EGM2008, y f QEOID2021.

EGM2008) con respecto a los datos de GPS/nivelación. Esto demuestra la necesidad e importancia del refinamiento regional del campo de gravedad, y es preferido para la determinación de las coordenadas del IHRF, comparado con el uso de actuales GGM de alta resolución en combinación con modelos topográficos directamente. Una validación relativa con los datos GPS/nivelación también es realizada, antes y después de aplicar la superficie de corrección. La ventaja de las validaciones relativas es que los errores relacionados con el datum vertical pueden cancelarse para una gran extensión, especialmente sobre distancias cortas de línea base (Featherstone, 2001). Esto es realizado calculando el valor diferencial de la anomalía de altura entre cada par de puntos GPS/nivelación (véase, por ejemplo, Sánchez et al., 2021):

$$\Delta\zeta_{ij} = (\zeta_i^{\text{GPS/nivelación}} - \zeta_j^{\text{GPS/nivelación}}) - (\zeta_i^{\text{gravimétrico}} - \zeta_j^{\text{gravimétrico}})$$

donde i y j son los índices del par de puntos GPS/nivelación. Para l puntos de GPS/nivelación, un número total de $l(l-1)/2$ líneas base o pares pueden ser formulados. En este caso, con $l = 3025$, en total 4.573.800 pares de $\Delta\zeta_{ij}$ son calculados. Estos pares son

agrupados basados en la longitud de la línea base d_{ij} , la cual es calculada como la distancia geodésica, es decir, la distancia más corta entre dos puntos i y j sobre el elipsoide de referencia (Featherstone, 2001). El error RMS de $\Delta\zeta_{ij}$ dentro de cada grupo antes y después de aplicar el modelo de corrección de 7 parámetros es visualizado en las Fig. 8a y 8b, respectivamente. Antes de aplicar la superficie de corrección, el error RMS del modelo gravimétrico QGeoidCOL2023 calculado con respecto a los datos GPS/nivelación aumenta gradualmente cuando la longitud de la línea base incrementa. Esto es esperado y puede ser explicado por los errores sistemáticos entre el modelo de cuasigeoide y los datos GPS/nivelación, como se visualiza en la Fig. 7a. Tal patrón es también observado en todos los GGM de alta resolución evaluados. No obstante, QGeoidCOL2023 presenta valores RMS más pequeños que todos los GGM en cada grupo de longitud de línea base. Sin embargo, QGEOID2021 no presenta este comportamiento, es decir, para longitudes de línea base entre 0 y 400 km, QGEOID2021 muestra el segundo más grande error RMS entre todos los modelos evaluados,

pero para longitudes más grandes que 700 km, éste entrega el menor valor RMS. Una posible razón podría ser que los efectos de las inconsistencias del datum sean menores para este modelo, como se muestra en la Fig. 7c, porque se refiere al datum vertical local. Después de reducir los efectos sistemáticos por una superficie de corrección, no se observa una correlación clara entre el valor RMS y la longitud de la línea base. QGeoidCOL2023 entrega el menor error RMS para todas las longitudes de línea base. Entre los GGM, XGM2019 entrega el mejor resultado en cada longitud de línea base, seguido por GECO, SGG-UGM-1 y EIGEN6C4, los cuales muestran un desempeño muy similar. EGM2008 y QGEOID2021 entregan los errores RMS más grandes y el segundo más grande, los cuales son casi el doble de los valores entregados por QGeoidCOL2023.

5.3 Modelo de cuasigeoide QGeoidCOL2023

La grilla de cuasigeoide calculada con resolución de $5' \times 5'$ QGeoidCOL2023, se muestra en la Fig. 9a. Los valores de la anomalía de altura varían entre -39.95 m y 33.42 m, los cuales ilustran la alta variación del campo gravitatorio en el área de estudio. En Colombia, la parte nororiental presenta anomalías de altura cercanas a 0 m, y la parte suroccidental tiene valores mucho más grandes de más de 20 m. En las zonas oceánicas circundantes, el norte (Mar Caribe) muestra valores negativos de anomalía de altura pero el oeste (Océano Pacífico) tiene valores positivos. El mapa de desviación estándar correspondiente del cuasigeoide calculado es mostrado en la Fig. 9b, con variaciones desde unos pocos milímetros hasta alrededor de 4 cm. Los valores son más pequeños en áreas donde la densidad de observaciones gravimétricas está disponible, lo cual es razonable. QGeoidCOL2023 es comparado con los cinco modelos globales de gravedad (GGM) de alta resolución considerados en la sección "Validación con datos GPS/nivelación", a saber: XGM2019, GECO, SGG-UGM-1, EIGEN6C4 y EGM2008, ordenados según su desempeño en dicha validación (véase la Tabla 3). Nuevamente, los GGMs son truncados en el grado 2159, y el modelo topográfico ERTM2160 es añadido para representar las partes de muy alta frecuencia. Las diferencias entre QGeoidCOL2023 y los cinco GGM se presentan en la Fig. 10a–e, respectivamente. Las estadísticas correspondientes de estas diferencias son listadas en la Tabla 4. En la Fig. 10a, casi no se aprecian diferencias en los países vecinos de Colombia, es decir, donde no se consideraron observaciones de gravedad (véase la Fig. 1b). Esto era de esperarse, porque en estas regiones QGeoidCOL2023 depende del modelo de fondo, concretamente XGM2019 para los grados 2 a 719, $dV_ELL_Earth2014$ para los grados 720 a 2159, y ERTM2160, mientras que por encima del grado 719 XGM2019 es también desarrollado de Earth2014. En Colombia, las diferencias reflejan la contribución adicional de los datos terrestres y aéreos. Las diferencias son más grandes en la parte oriental, donde los datos aéreos están localizados, y las posibles razones son o bien que estos levantamientos aéreos no fueron incluidos en la grilla de anomalías de gravedad de la NGA que es usada

para el cálculo de XGM2019 o que nuestros métodos de procesamiento, por ejemplo, estimación de sesgo y detección de valores atípicos mejoraron la calidad de los datos de gravedad aérea. En la parte occidental de Colombia, donde están ubicados los datos terrestres, grandes diferencias entre QGeoidCOL2023 y XGM2019 se observan en las áreas montañosas. Esto es explicable porque aunque los datos terrestres ya fueron incluidos en la grilla de anomalías gravimétricas de la NGA, esta tiene una resolución espacial baja $15' \times 15'$ y está limitada espectralmente al grado 719 (Zingerle et al., 2020), mientras el modelo topográfico Earth2014 no puede representar con precisión las verdaderas señales gravitacionales de alta frecuencia. Por lo tanto, QGeoidCOL2023 también muestra mejoras especialmente en las áreas montañosas al usar los datos terrestres con un grado espectral mucho más alto. En el área oceánica, las diferencias son más grandes en las regiones costeras, lo cual se debe a las mejoras del modelo DTU21GRA en comparación con DTU13GRA, como ya se explicó en la sección "Coeficientes estimados". Las diferencias entre QGeoidCOL2023 y GECO, SGG-UGM-1 y EIGEN6C4, es decir, Fig. 10b–d muestran un patrón similar. Comparado con la Fig. 10a, se observan diferencias más grandes en estos tres GGM dentro de Colombia, lo cual puede ser debido al hecho que XGM2019 incorpora una grilla de anomalía gravimétrica mejorada, pero una grilla de gravedad más antigua es usada para los otros tres modelos, como ya se discutió en la sección "Validación con datos GPS/nivelación". En la zona oceánica, EIGEN6C4 muestra diferencias mucho más grandes con respecto a QGeoidCOL2023, comparado con todos los otros GGMs, especialmente en el Océano Pacífico. GECO y SGG-UGM-1 son desarrollados por combinación directa entre GECO y EGM2008, pero EIGEN6C4 combina EGM2008 sobre los continentes únicamente y DTU10 sobre los océanos. Por lo tanto, estas grandes diferencias en el Océano Pacífico podrían venir ya sea de DTU10 o de la estrategia de combinación de datos usada para desarrollar EIGEN6C4. Esto último es soportado por los resultados presentados en Gilardoni et al. (2016), quienes mostraron que la combinación EIGEN6C4 no es óptima en el Mar de Weddell. La razón exacta para tal comportamiento de EIGEN6C4 en áreas oceánicas aún requiere más investigación. No obstante, es un resultado interesante e indica que se debe tener especial atención si se pretende usar EIGEN6C4 en estudios realizados en zonas marinas. La Fig. 10e presenta las más grandes desviaciones entre los cinco GGM en comparación con QGeoidCOL2023. Las diferencias muestran patrones de longitud de onda larga, lo cual puede ser atribuido a la ausencia de datos GOCE en EGM2008. QGeoidCOL2023 también es comparado con QGEOID2021, y sus diferencias se muestran en la Figura 10f, con las estadísticas correspondientes presentadas en la Tabla 4. Las principales diferencias son ubicadas en la cordillera de los Andes como también en la selva amazónica (véase Fig. 1a). Como no se tiene suficiente información sobre cómo fue calculado QGEOID2021 ni de como fueron procesados los datos gravimétricos, es difícil concluir las razones exactas para estas diferencias. Sin

embargo, es probable que ello resulte de inconsistencias de datum. En la región amazónica, el mismo conjunto de datos aéreos (nótese que diferentes procesamientos de datos han sido implementados en este estudio) también es usado en QGEOID2021 (Matos et al., 2021), pero las diferencias resultantes del cuasigeoide son de alrededor de 40 cm. Tales grandes pero consistentes diferencias son poco probables que se deban a errores de cálculo, y no son visibles en la comparación entre QGeoidCOL2023 y los diferentes GGM. Es posible que el sesgo en los levantamientos aéreos no fuera corregido en el cálculo de QGEOID2021 o que este fuera reducido a una superficie de referencia diferente. Grandes diferencias también se observan en los Andes, tanto dentro como fuera de Colombia, donde QGeoidCOL2023 depende puramente de XGM2019 y del modelo topográfico. Por lo tanto, la posibilidad de que estas diferencias provengan de errores de cálculo en QGeoidCOL2023 es descartada.

6 Conclusión

La determinación de sistemas de altura basados en el geopotencial depende del refinamiento regional del campo de gravedad, pero los modelos regionales de gravedad de alta resolución son a menudo inexistentes en áreas en desarrollo o recién industrializadas debido a desafíos como la distribución heterogénea de los datos y su calidad. Este estudio aborda este problema y calcula el primer modelo cuasigeoidal de alta resolución para Colombia desde 2004. Estrategias y estructuras robustas de procesamiento de datos son propuestas para mitigar discrepancias sistemáticas, registros erróneos y valores atípicos en las mediciones terrestres históricas de gravedad que abarcan seis décadas. Se realiza un examen exhaustivo de 17 levantamientos gravimétricos aéreos, cada uno medido en diferentes momentos y posprocesado usando diferentes procedimientos, antes de su inclusión en el cálculo del cuasigeoide. Un análisis cruzado es realizado dentro de cada levantamiento, y los resultados indican precisión de datos heterogéneos. Una evaluación de los datos aéreos es llevada a cabo mediante comparación con el modelo SATOP, el cual revela sesgos sustanciales y diversos que superan los 40 mGal en diferentes levantamientos. Para resolver este problema, un método de estimación de sesgo es desarrollado basado en funciones base radiales esféricas SRBF. Su validez es confirmada primero por una prueba de simulación y luego por la evaluación con referencia a SATOP después de eliminar los sesgos estimados en los datos aéreos. Adicionalmente, este modelo de estimación de sesgos proporciona pesos relativos entre diferentes levantamientos aéreos, y ofrece información útil para establecer la matriz de covarianza de los datos aéreos en la estimación de parámetros. La eliminación de sesgos en los datos es esencial en la modelación del cuasigeoide para prevenir errores no deseados, y sería interesante para futuros trabajos explorar las posibilidades de implementar tal estimación de sesgo basado en otros métodos de modelado regional del campo de gravedad, por ejemplo, el Colocación de Mínimos Cuadrados (LSC). Para compensar la ausencia de observaciones gravimétricas en

el área marina, se aprovechan las anomalías de gravedad derivadas de altimetría DTU21GRA. Los resultados del modelado demuestran mejoras en comparación con el uso directo de modelos globales GGMs en la región marina. Los métodos y procedimientos desarrollados en este cálculo pueden integrarse fácilmente en otras áreas de estudio con indefinida o desafiante calidad de los datos, facilitando la realización del Sistema Internacional de Referencia de Alturas (IHRs) o de cualquier sistema de alturas basado en el geopotencial.

El modelo cuasigeoidal calculado QGeoidCOL2023 es validado exhaustivamente utilizando datos GPS/nivelación tanto en sentido absoluto como relativo. Para tener en cuenta los efectos sistemáticos causados por inconsistencias de datum, una superficie de corrección es aplicada a los datos GPS/nivelación. Entre los distintos modelos de corrección examinados, el modelo de 7 parámetros proporciona el menor valor de desviación estándar (STD) entre el modelo cuasigeoide gravimétrico y los datos GPS/nivelación, lo cual es explicable debido a la compleja topografía del área de estudio. La desviación estándar STD obtenida para QGeoidCOL2023 es de 15.76 cm en comparación con los datos GPS/nivelación. Cabe mencionar que este valor de STD también incluye las incertidumbres y errores del conjunto de datos GPS/nivelación, el cual no se espera que tenga alta precisión y está localizado principalmente en áreas montañosas donde existen grandes vacíos de datos. Aunque 15.76 cm es relativamente grande comparado con valores reportados en regiones bien medidas, este aún representa una precisión satisfactoria del cuasigeoide para esta área de estudio. Como referencia, el último modelo cuasigeoidal sudamericano QGEOID2021 presenta un STD de 24.51 cm respecto a los datos GPS/nivelación, el cual es 55% más grande que el obtenido por QGeoidCOL2023. El desempeño de cinco modelos globales de gravedad GGMs recientes de alta resolución también es evaluado con los datos GPS/nivelación. Ellos entregan valores de STD entre 17.86 cm (XGM2019) y 28.09 cm (EGM2008), con un valor medio de 21.67 cm, el cual es 37% más alto que el de QGeoidCOL2023. En la validación relativa GPS/nivelación, QGeoidCOL2023 de nuevo supera a QGEOID2021 y a todos los cinco GGMs, es decir, entrega los más pequeños errores RMS en cada grupo de longitud de línea base.

También se realizaron comparaciones entre QGeoidCOL2023, QGEOID2021 así como con los cinco GGMs en una grilla de $5' \times 5'$ sobre toda el área de estudio. Esta comparación revela las contribuciones y mejoras aportadas por las mediciones aéreas y el DTU21GRA, las cuales no son reflejadas en la validación con datos de GPS/nivelación debido a su distribución limitada. EGM2008 es el GGM menos confiable para Colombia, mostrando errores grandes de longitud de onda debido a la ausencia de datos GOCE. Los modelos cuasigeoidales calculados de GECO, SGG-UGM-1 y EIGEN6C4 son similares, pero un hallazgo interesante es que EIGEN6C4 no puede representar el campo de gravedad en las áreas marinas adecuadamente, especialmente en el Océano Pacífico. QGEOID2021 muestra un sesgo grande de alrededor de 40 cm sobre la

región del Amazonas comparado con QGeoidCOL2023 y todos los GGMs, lo cual podría ser introducido por sesgos no corregidos en los datos aéreos durante su cálculo. En resumen, tanto la validación GPS/nivelación y los resultados de comparación de grilla indican la validez y beneficios de los métodos de cálculo y procedimientos de procesamiento de datos. Ellos también demuestran por qué el refinamiento regional del campo de gravedad es preferido para la determinación de coordenadas del IHRS comparado con el uso de GGMs de alta resolución en combinación con modelos topográficos directamente. En consecuencia, QGeoidCOL2023 representa hasta ahora el modelo cuasigeoidal más confiable en Colombia para la realización del IHRS.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer a la Fundación Alemana de Investigación (DFG) por financiar el proyecto "Enhanced geopotential field modelling as basis for the establishment of precise height systems (Geo-H)" (Número de subvención: SA3330/4-1). Agradecemos al Dr. Ole B. Andersen por proporcionar amablemente el DTU21GRA. Reconocemos a los desarrolladores del Generic Mapping Tool (GMT) principalmente utilizado para generar las figuras en este trabajo. Los autores también agradecen a los revisores y editores por sus valiosos comentarios y sugerencias.

Contribuciones de los autores

QL: Conceptualización, Metodología, Software, Validación, Análisis formal, Investigación, Curación de datos, Visualización, Redacción del borrador original, Revisión y edición del manuscrito. MS: Metodología, Validación, Investigación, Revisión y edición del manuscrito, Administración del proyecto, Adquisición de financiamiento. LS: Conceptualización, Validación, Investigación, Curación de datos, Revisión y edición del manuscrito, Administración del proyecto, Adquisición de financiamiento. LM: Curación de datos, Revisión y edición del manuscrito. DC: Curación de datos, Revisión y edición del manuscrito.

Financiamiento

Fondos de Open Access habilitados y organizados por Projekt DEAL. Este estudio fue apoyado por la Fundación Alemana de Investigación (DFG). Fondos de Open Access habilitados y organizados por Projekt DEAL.

Disponibilidad de datos y materiales

Las observaciones de gravedad terrestres y aéreas, así como los datos GPS/nivelación, fueron proporcionados por la Agencia Nacional de Cartografía IGAC, el Servicio Geológico Colombiano y la compañía petrolera Ecopetrol. El DTU21GRA fue proporcionado por el

Dr. Ole B. Andersen de la Universidad Técnica de Dinamarca. Los modelos globales de gravedad utilizados en este estudio pueden accederse públicamente a través de <http://icgem.gfz-potsdam.de>. El modelo de cuasi-geoide QGeoidCOL2023 obtenido en este estudio estará disponible en el repositorio del Servicio Internacional del Geoide.

Declaraciones

Intereses en competencia

Los autores declaran que no tienen intereses en competencia.

Detalles de los autores

1. Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut, Universidad Técnica de Múnich (DGFI-TUM), Arcisstrasse 21, 80333 Múnich, Alemania.
2. Instituto Geográfico Agustín Codazzi, Cra. 30 No 48-51, Bogotá, Colombia.

Recibido: 2 de noviembre de 2023 Aceptado: 11 de febrero de 2024 Publicado en línea: 26 de febrero de 2024.

Nota final:

Esta es una traducción informativa del documento original en inglés publicado por Springer (Liu, L. et al., 2024). En caso de duda sobre la interpretación o terminología técnica, se recomienda remitirse al artículo original en inglés.

Referencia bibliográfica (formato Springer): Liu, Q., Schmidt, M., Sánchez, L., et al. (2024). High-resolution regional gravity field modeling in data challenging regions for the realization of geopotential-based height systems. *Earth Planets Space*, 76(35), Springer. DOI: Liu et al. *Earth, Planets and Space* (2024) 76:35 <https://doi.org/10.1186/s40623-024-01981-1>